

1. Substitutionen $y(t) = z(t)e^{-t}$ ger vänsterledet $z''e^{-t} + 4ze^{-t}$. Division med e^{-t} ger nu $z'' + 4z = \cos 3t$. Vi gör ansatsen $z = A \cos 3t$ och får vid insättning $-9A + 4A = 1$, eller $z_p = (-1/5) \cos 3t$ och därmed $y_p = -(1/5)e^{-t} \cos 3t$.

Ekvationens karakteristiska ekvation är $0 = r^2 + 2r + 5$, med rötterna $-1 \pm 2i$. Den homogena ekvationen har därför de reella lösningarna $e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$, där A och B är godtyckliga konstanter.

Svar: $y = -(1/5)e^{-t} \cos 3t + e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$, där A och B är godtyckliga konstanter.

2. Normalen genom $(a, f(a))$ har riktningskoefficienten $-1/f'(a)$, så normalen har ekvationen $y = -x/f'(a) + f(a) + a/f'(a)$. Skärningspunkten med x -axeln ges därför av $(f(a)f'(a) + a, 0)$.

Triangeln med hörn i $(f(a)f'(a) + a, 0)$, $(a, f(a))$ och $(a, 0)$ har area $|f(a)f'(a)f(a)|/2$ och detta ska alltså vara 2, oberoende av a . Detta ger $f(x)^2 f'(x) = \pm 4$ eller $f(x)^3/3 = \pm 4x + C$, så $f(x) = (\pm 12x + C_1)^{1/3}$, för någon konstant C_1 .

$f(3) = 2$ ger $2 = (\pm 36 + C_1)^{1/3}$, så vi ska ha $C_1 = -28$ eller $C_1 = 44$.

Svar: $f(x) = (12x - 28)^{1/3}$ eller $f(x) = (44 - 12x)^{1/3}$.

3. (a) Vi sätter

$$a_n = \frac{(n!)^2 x^{4n+1}}{2^n (2n+1)!}$$

och får

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2 |x|^4}{2(2n+3)(2n+2)}$$

som har gränsvärdet $|x|^4/8$, när $x \rightarrow \infty$. Serien konvergerar när detta är < 1 och divergerar när det är > 1 . Serien har därför konvergensraden $8^{1/4}$.

Svar: $8^{1/4}$.

- (b) Om vi sätter $x = 1/3$ är serien $f(x) = \sum_i (-1)^i x^{2i} / ((2i)(2i-1))$. Den konvergerar när $|x| < 1$ och därför när $x = -1/3$.

Vi har $f'(x) = \sum_i (-1)^i x^{2i-1} / (2i-1)$ och $f''(x) = \sum_{i=0} (-1)^i x^{2i} = 1/(1+x^2)$. Integration och bestämning av konstant ger $f'(x) = \arctan x$. Samma sak ger sedan

$$f(x) = \int \arctan x \, dx = \{PI\} = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Svar: $\arctan(1/3)/3 - \ln(10/9)/2$.

4. (c) Vi söker (a, b, c) så att villkor är uppfyllda. Vi kan lika gärna sätta $a = 1$. Detta ger nu $9 = 1 + b^2 + c^2$ och $-5 = -1 + 4b - 2c$, som i sin tur ger $c = 2b + 2$. Insatt i den kvadratiske ekvationen ger detta $8 = 5b^2 + 8b + 4$ eller $0 = (b+2)(5b-2)$. Vi kan t.ex. välja $b = -2$ och vektorn $(1, -2, -2)$.

Svar: T.ex. $(1, -2, -2)$.

6. Linjen har riktningsvektorn $(5, -6, 4)$ och parametreras därför av $(-2 + 5t, 4 - 6t, -5 + 4t)$, som ska bli $(-1, 0, 1)$. Andra koordinaten ger $t = 2/3$, men då blir inte första koordinaten $= 0$.

Svar: Punkten ligger inte på linjen.

7. Man har $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. Substitution av x med x^3 ger Taylorpolynomet $1 + x^3 + x^6 + x^9$ kring $x = 0$.

Svar: $1 + x^3 + x^6 + x^9$.

8. En linje vinkelrät mot planet har riktningsvektorn $(1, 2, 3)$. Om den går genom $(0, 3, 4)$ parametreras den av $(t, 3 + 2t, 4 + 3t)$. Skärningspunkten mellan denna linje och planet ger den punkt i planet som ligger närmast $(0, 3, 4)$.

Insättning i planets ekvation ger $14t = 4 - 18$, eller $t = -1$, så den sökta punkten är $(-1, 1, 1)$.

Svar: $(-1, 1, 1)$.

9. Skivformeln ger att volymen är

$$\frac{\pi}{4} \int_0^2 (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_0^2 (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dy = \frac{\pi}{4} \left[e^{2x}/2 - e^{-2x}/2 + 2x \right]_0^2 = \frac{\pi}{4} (2 \sinh 4 + 4)$$

Svar: $\pi(2 + \sinh 4)/2$.

10. Sätter man

$$a_n = \frac{x^{3n+1}}{n^2 2^{2n}}$$

får man

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^3 n^2}{(n+1)^2 4},$$

med gränsvärdet $|x|^3/4$. Serien konvergerar när detta är < 1 och divergerar när det är > 1 . Serien har konvergensradien $4^{1/3}$.

När $x = -4^{1/3}$ är serien alternerande med avtagande termer och därför konvergent.

När $x = 4^{1/3}$ är serien $\sum 4^{1/3}/i^2$, som konvergerar eftersom $\sum 1/i^2$ är känd för att konvergera.

Svar: För alla x sådana att $|x| \leq 4^{1/3}$.

11. Vi antar att differentialekvationen har ett vektorfält som bara beror på y -koordinaten. En möjlig ekvation skulle då vara

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \text{ som ger } \frac{dy}{1 - y^2} = dx.$$

Integration ger nu

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = x + C.$$

Exponentiering och utlösning av y , ger sedan

$$y = 1 - \frac{2}{1 + De^{2x}},$$

där D är en godtycklig konstant.

Svar: $y = 1 - 2/(1 + De^{2x})$.