

# Kompletterande teori för Envariabelanalys del B på I

J A S, ht-04

## 1 Bestämda integralen

### 1.1 Bestämda integralens definition

Antag att  $f(x)$  är en begränsad funktion definierade på (det begränsade) intervallet  $[a, b]$ . Vi vill ha en precis definition av vad som bör menas med arean mellan grafen till en funktion och  $x$ -axeln. Detta är inte helt oproblematiskt för funktioner i allmänhet som vi ska se i ett exempel senare. För att få rimliga räkneregler ska vi räkna area över  $x$ -axeln positivt och area under densamma negativt. Det tal som mäter denna area ska vi beteckna  $\int_a^b f(x) dx$  och kalla det integralen av funktionen  $f(x)$  mellan gränserna  $a$  och  $b$  (eller över intervallet  $[a, b]$ ).

Vi börjar med att definiera vad som menas med en *över-* respektive *undersumma* till  $f(x)$  på  $[a, b]$ . En *översumma* är arean (med tecken som ovan) av ett stapeldiagram på  $[a, b]$  som ligger ovanför grafen till  $f(x)$ . En *undersumma* är på liknade sätt arean av ett stapeldiagram som ligger under grafen till  $f(x)$ . I detalj kan detta skrivas så här:

Dela in intervallet i delintervall genom att välja ett antal  $(n + 1)$  punkter i det:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Välj tal  $M_k$  och  $m_k$ , så att  $f(x) \leq M_k$ , respektive  $m_k \leq f(x)$ , när  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Talen

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \dots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

och

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + \dots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

kallas då över- respektive undersumma till  $f(x)$  över intervallet  $[a, b]$ .

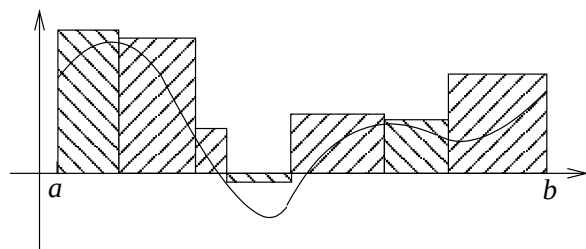


Fig 1. Figuren illustrerar ett stapeldiagram som ligger ovanför grafen till en funktion. Arean av stapeldiagrammet, där area under  $x$ -axeln räknas negativt, kallas en översumma till funktionen.

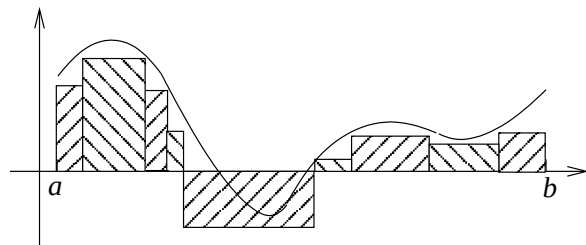


Fig 2. Figuren illustrerar ett stapeldiagram som ligger under grafen till en funktion. Arean av stapeldiagrammet, där area under  $x$ -axeln räknas negativt, kallas en undersumma till funktionen.

En funktion  $f(x)$  har förstås ett otal över- och undersummor, men varje översumma  $S$  är större än varje undersumma  $s$ , även om de kommer från olika indelningar av intervallet  $[a, b]$ . Det betyder att mängden av tal som dyker upp som översummor till  $f(x)$  är nedåt begränsad (av t.ex. en undersumma), och har därför, enligt fullständighetsegenskapen hos de reella talen, en största undre begränsning  $U$  (infimum av mängden av alla översummor till  $f(x)$ ). På motsvarande vis finns det ett minsta tal  $L$  större än alla undersummor (supremum av mängden av undersummor till  $f(x)$ ). Det gäller att  $L \leq U$  eftersom varje undersumma är  $\leq U$ . Om det inträffar att de två talen  $L$  och  $U$  är lika är  $f(x)$  integrerbar över  $[a, b]$ :

**Definition 1.1** En begränsad funktion  $f(x)$  på  $[a, b]$  är integrerbar över intervallet om det finns precis ett tal mindre än eller lika med alla översummor och större än eller lika med alla undersummor till  $f(x)$  över  $[a, b]$ . Detta tal betecknas då

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Ett exempel på en funktion som inte är integrerbar över  $[0, 1]$  får man om man sätter  $f(x) = 1$ , när  $x$  är kvot mellan två heltal ( $x$  rationellt tal) och  $f(x) = 0$ , annars ( $x$  irrationellt tal). En fundamental egenskap hos de reella talen är att det mellan två (olika) tal, vilka som helst, finns såväl oändligt många rationella tal, som irrationella. Funktionen har därför (i detta fall rent av) en minsta översumma som är  $U = 1$  och en största undersumma som är  $L = 0$ . Det betyder att (vi med den definition vi nu har) inte kan mäta arean mellan grafen till denna funktion och  $x$ -axeln.

Vi behöver veta att våra välkända funktioner är integrerbara:

**Sats 1.1** Antag att  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ . Då är  $f(x)$  integrerbar över  $[a, b]$ .

**Anm.** Minns att en kontinuerlig funktion på ett slutet begränsat intervall antar så väl ett största som ett minsta värde. Vi kallar skillnaden mellan dessa för *variationen* av  $f(x)$  på intervallet.

**Lemma 1.1** Antag att  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ . Då finns det, för varje tal  $\epsilon > 0$ , en indelning av  $[a, b]$ , så att  $f(x)$  har variation  $< \epsilon$  på var och en av delarna.

**Bevis av satsen** (under förutsättning att lemmat gäller) Vi kan bevisa satsen genom att för varje tal  $\epsilon > 0$  bestämma en översumma  $S$  och en undersumma  $s$ , så att  $S - s < \epsilon$ . Lyckas detta gäller nämligen  $0 \leq U - L < S - s < \epsilon$ , för varje  $\epsilon > 0$ , så  $U - L = 0$ .

För att klara detta delar vi enligt lemmat upp  $[a, b]$  i, låt oss säga  $n$  delar så att  $f(x)$  har variation  $< \epsilon/(b - a)$ , på varje del. Låt delningspunkterna vara

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Låt sedan  $M_k$  och  $m_k$  vara funktionen  $f$ :s största respektive minsta värde på intervallet  $[x_k, x_{k+1}]$  och  $S$  respektive  $s$  den över- respektive undersumma vi kan få från detta val. Då gäller att

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < (\epsilon/(b - a)) \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = (\epsilon/(b - a))(x_n - x_0) = \epsilon.$$

■

**Bevis av lemmat** Antag att detta inte är möjligt för något  $\epsilon > 0$ . Dela  $[a, b] = [a_0, b_0]$  mitt itu. Då är det heller inte möjligt på minst en av de två delarna, låt oss säga  $[a_1, b_1]$ . Proceduren kan upprepas och vi får en avtagande följd av intervall  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , av längd  $(b - a)/2^n$ , sådana att  $f(x)$  har variation  $\geq \epsilon$  på varje  $I_n$ .

Enligt inkapslingssatsen finns ett tal  $r$  som ingår i samtliga dessa intervall. Eftersom  $f(x)$  är kontinuerlig i  $r$  finns en omgivning till  $r$  där  $f(x)$  har en variation  $< \epsilon$ . Men denna omgivning innehåller också  $I_n$ , när  $n$  är tillräckligt stort. En motsägelse. Detta visar i sin tur lemmat. ■

Beviset av lemmat visar också att vi, för varje  $\epsilon > 0$ , kan dela in intervallet  $[a, b]$  i **lika stora** delar, så att den kontinuerliga funktionen  $f(x)$  har variation  $< \epsilon$ , på varje del. För att se detta ersätter man frasen "dela upp  $[a, b]$  i delar så att  $f(x)$  har variation  $< \epsilon$ , på varje del" i beviset med "dela upp  $[a, b]$  i **lika stora** delar så att  $f(x)$  har variation  $< \epsilon$ , på varje del" och upprepar resten av beviset.

Antag att man gjort en sådan indelning med  $n + 1$  delningspunkter:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Eftersom avståndet mellan alla dessa punkter är det samma  $((b - a)/n)$ , som vi för korthets skull kallar  $\Delta x$  har vi att  $x_k = a + k(b - a)/n$ . Summan

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k(b - a)/n) \Delta x = f(x_0) \Delta x + f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x,$$

som kallas en **Riemannsumma för**  $f(x)$ , är då i allmänhet varken en översumma eller en undersumma till  $f(x)$ . Ändå gäller att

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k(b-a)/n) \Delta x \right| < \epsilon.$$

Detta motiverar att

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k(b-a)/n) \Delta x,$$

och ger en viktig möjlighet att, för kontinuerliga funktioner, tolka integralen som ett gränsvärde (eller en oändlig summa). Detta förklarar också symbolerna “ $\int$ ” och “ $dx$ ” som alltså står för generaliserad summa respektive infinitesimalt (oändligt litet) tillskott i variabeln.

## 1.2 Integralkalkylens huvudsats

Vi ska se att man kan integrera kontinuerliga funktioner genom att “derivera baklänges,” men behöver för detta

**Sats 1.2 (Integralkalkylens medelvärdessats)** *Antag att  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ . Då finns ett tal  $\xi$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , så att*

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi).$$

Beviset bygger på den så kallade satsen om mellanliggande värden: Om  $f(x)$  är kontinuerlig på ett intervall och antar värdena  $A$  och  $B$  där, så antar  $f(x)$  även alla värden mellan dessa båda tal på intervallet.

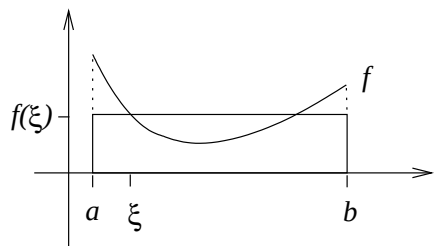


Fig 3. Mellan  $a$  och  $b$  finns (minst) ett tal  $\chi$ , så att rektangeln med intervallet  $[a, b]$  som bas och  $f(\chi)$  som höjd har arean  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Bevis.** Eftersom  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ , antar den ett största värde  $M$  och ett minsta värde  $m$  på intervallet. Detta ger oss översumman  $M(b-a)$  samt undersumman  $m(b-a)$  och

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Enligt satsen om mellanliggande värden finns nu ett tal  $\xi$  mellan  $a$  och  $b$ , så att  $f(\xi)$  är mellersta ledet.

■

Antag nu att funktionen  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ . För ett fixt  $x$  i intervallet är då  $\int_a^x f(t) dt$  ett tal. (Att vi här bytt från  $x$  till  $t$  i integralen beror på att vi nu använder  $x$  som en av gränserna i integralen.) Vi får på detta vis en ny funktion  $\bar{f}(x) = \int_a^x f(t) dt$  från vår gamla funktion  $f(x)$ . Nästa sats, som är nyckeln till beräkning av integraler, ger sambandet mellan  $\bar{f}(x)$  och  $f(x)$ .

**Sats 1.3** *Antag att  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ . Då är*

$$\bar{f}(x) = \int_a^x f(t) dt$$

*kontinuerlig på  $[a, b]$  och deriverbar på  $(a, b)$  med  $\bar{f}'(x) = f(x)$ .*

**Bevis.** Vi ska undersöka differenskvoten

$$(1/h)(\bar{f}(x+h) - \bar{f}(x)) = (1/h) \int_x^{x+h} f(x) dx,$$

när  $h \rightarrow 0$ . Enligt integralkalkylens medelvärdessats är detta  $f(\xi_h)$ , för något  $\xi_h$  mellan  $x$  och  $x+h$ . Vi ser att  $\xi_h \rightarrow x$ , när  $h \rightarrow 0$ . Eftersom  $f(x)$  är kontinuerlig ger detta att  $(1/h)(\bar{f}(x+h) - \bar{f}(x)) = f(\xi_h) \rightarrow f(x)$ , när  $h \rightarrow 0$ . Enligt derivatans definition betyder detta att  $\bar{f}'(x) = f(x)$ .

Eftersom  $\bar{f}(x)$  är deriverbar i  $(a, b)$  är den också kontinuerlig där. Att  $\bar{f}(x)$  dessutom är kontinuerlig när  $x = a$  och  $x = b$  följer direkt av integralkalkylens medelvärdessats. Tex är  $\bar{f}(x) = (x - a)f(\xi_x)$ , för något  $\xi_x$  mellan  $a$  och  $x$ . Låter vi  $x \rightarrow a$ , ger detta  $\bar{f}(x) \rightarrow 0 \cdot f(a) = 0$ , som ju är  $\bar{f}(a)$ . På liknande sätt är  $\bar{f}(x) - \bar{f}(b) = (b - x)f(\xi_x)$ , för något tal  $\xi_x$  mellan  $x$  och  $b$ , vilket ger att  $\bar{f}(x) - \bar{f}(b) \rightarrow 0$  eller  $\bar{f}(x) \rightarrow \bar{f}(b)$ , när  $x \rightarrow b$ . ■

**Sats 1.4 (Integralkalkylens huvudsats)** Antag att  $f(x)$  och  $F(x)$  är kontinuerliga på  $[a, b]$  och att  $F(x)$  är en deriverbar på  $(a, b)$  med  $F'(x) = f(x)$ , för alla  $x$  i  $(a, b)$ . Då gäller

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Anm.** En funktion  $F(x)$  sådan att  $F'(x) = f(x)$  kallas en *primitiv funktion* till  $f(x)$ . Sats 1.3 visar att varje kontinuerlig funktion definierad på ett intervall har en primitiv funktion. Enligt satsen är nämligen  $\bar{f}(x) = \int_a^x f(t) dt$  en primitiv funktion till  $f(x)$ .

Det är brukligt att skriva  $\left[F(x)\right]_a^b$  för talet  $F(b) - F(a)$ .

**Bevis.** Sätter vi  $\bar{f}(x) = \int_a^x f(t) dt$  har vi  $\bar{f}'(x) = f(x) = F'(x)$ . Eftersom båda funktionerna är deriverbara på  $(a, b)$  och kontinuerliga på  $[a, b]$  ger detta att  $F(x) - \bar{f}(x)$  är en konstant, låt oss säga  $C$ , på intervallet. Av  $F(x) = \bar{f}(x) + C$  ser vi att  $F(b) - F(a) = \bar{f}(b) + C - (\bar{f}(a) + C) = \bar{f}(b) - \bar{f}(a) = \int_a^b f(x) dx - 0$ . ■

## 2 Differentialekvationer

### 2.1 Linjära av första ordningen

En differentialekvation av typen

$$y' + a(t)y = b(t)$$

kallas *linjär av första ordningen*. Specialfallet  $a(t) = 0$  är enkel att lösa, eftersom

$$y' = b(t)$$

har lösningen

$$y = \int b(t) dt = B(t) + C$$

där  $B(t)$  är en godtycklig primitiv funktion till  $b(t)$  och  $C$  en godtycklig konstant. (Vi förutsätter här att vi löser differentialekvationen på ett intervall.) Det allmänna fallet angriper man genom att återföra det på specialfallet enligt följande:

Låt  $A(t)$  vara en primitiv funktion till  $a(t)$ , så att  $A'(t) = a(t)$ . Då gäller

$$(y \cdot e^{A(t)})' = y' \cdot e^{A(t)} + y \cdot e^{A(t)} A'(t) = e^{A(t)} (y' + a(t)y).$$

Vi multiplicerar därför ekvationen

$$y' + a(t)y = b(t)$$

med  $e^{A(t)}$  och konstaterar att den därigenom övergår i

$$(y \cdot e^{A(t)})' = b(t)e^{A(t)}$$

där vi kan integrera och få

$$y \cdot e^{A(t)} = \int b(t)e^{A(t)} dt.$$

Här bestämmer vi de primitiva funktionerna och löser därefter ut  $y$ .

**Sammanfattning:**

För att lösa en differentialekvation av formen

$$y' + a(t)y = b(t)$$

gör man så här.

1. Bestäm en primitiv funktion  $A(t)$  till  $a(t)$  och multiplicera differentialekvationen med  $e^{A(t)}$ . Denna faktor kallas *den integrerande faktorn*.
2. Differentialekvationen övergår i

$$\frac{d}{dt}(y \cdot e^{A(t)}) = b(t)e^{A(t)}.$$

3. Integrera och lös ut  $y$ .

**Exempel 2.1** Lös differentialekvationen

$$(t+1)y' + 2y = (t+1)^3, \text{ för } t > -1.$$

Vi skriver först om ekvationen på formen  $y' + a(t)y = b(t)$ . Division med  $(t+1)$  ger

$$y' + \frac{2}{t+1}y = (t+1)^2.$$

Eftersom  $\int 2/(t+1) dt = 2 \ln(t+1) + C$  är  $e^{2 \ln(t+1)} = (t+1)^2$  en integrerande faktor. (Det räcker med en och vi har valt den vi får med  $C = 0$ .) Efter multiplikation med denna får vi  $((t+1)^2 y)' = (t+1)^{2+2}$  och alltså

$$(t+1)^2 y = \int (t+1)^4 dt$$

dvs  $(t+1)^2 y = (t+1)^5/5 + C$  som ger  $y = (t+1)^3/5 + C(t+1)^{-2}$ .

**Exempel 2.2** Bestäm den funktion  $f(t)$  som utöver  $f'(t) + 2tf(t) = t$  uppfyller  $f(0) = 1$ .

Funktionen satisfierar alltså differentialekvationen  $y' + 2ty = t$ . Eftersom  $t^2$  är en primitiv funktion till  $2t$  är  $e^{t^2}$  en integrerande faktor. Differentialekvationen kan därför skrivas  $(ye^{t^2})' = te^{t^2}$ . Detta ger  $ye^{t^2} = \int te^{t^2} dt$ . I denna integral kan vi göra variabelsubstitutionen  $u = t^2$ , som leder till att  $du = 2tdt$ , och få  $\int te^{t^2} dt = (1/2) \int e^u du = e^u/2 + C$ .

När vi går tillbaka till  $t$  kan vi alltså se att  $ye^{t^2} = \int te^{t^2} dt = (1/2)e^{t^2} + C$ . Vi löser ut  $y$  genom att dividera med  $e^{t^2}$ . Detta leder till  $y = 1/2 + Ce^{-t^2}$ . För något värde på  $C$  är alltså

$$f(t) = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}.$$

Eftersom vi dessutom ska ha  $1 = f(0)$  måste  $1 = 1/2 + Ce^{-0^2}$  dvs  $C = 1/2$ . Svaret blir därför

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t^2} = \frac{1}{2}(1 + e^{-t^2}).$$

## 2.2 Linjära differentialekvationer av andra ordningen med konstanta koefficienter

De ekvationer vi skall betrakta är av formen

$$y'' + ay' + by = h(t)$$

där  $a$  och  $b$  är konstanter, medan  $h(t)$  är en given funktion.

Antag att  $f(t)$  och  $g(t)$  är två lösningar till ekvationen, dvs att  $f'' + af' + bf = h$  och  $g'' + ag' + bg = h$ . Skillnaden av dessa båda ekvationer ger att  $(g-f)'' + a(g-f)' + b(g-f) = 0$ , dvs  $g-f$  är en lösning till ekvationen

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Denna ekvation kallas den *homogena ekvationen* associerad med den ursprungliga. Den ursprungliga ekvationen kallas den *inhomogena ekvationen* (om  $h \neq 0$ ).

Antag vidare att vi lyckas bestämma alla lösningar  $y_h$  ( $h$  står för "homogen") till den homogena ekvationen  $y'' + ay' + by = 0$ , och att vi dessutom hittar *en* lösning  $y_p$ , motsvarande t.ex.  $f$  ovan ( $p$  står för "partikulär"), till den inhomogena ekvationen.

Varje lösning  $g$  till den inhomogena ekvationen kan då skrivas  $g = y_p + (g - y_p)$ , där  $g - y_p$  är en av funktionerna  $y_h$ .

Det betyder att om vi hittar en lösning  $y_p$  till den inhomogena ekvationen och lyckas bestämma alla lösningar  $y_h$  till den homogena ekvationen, så ges alla lösningar till den inhomogena ekvationen av  $y_p + y_h$ .

Vi har alltså:

**Sats 2.1** *Antag att  $y_p$  är en lösning till*

$$y'' + ay' + by = h(t).$$

*Då är en funktion  $f$  en lösning precis när det finns en lösning  $y_h$  till*

$$y'' + ay' + by = 0$$

*så att*

$$f = y_p + y_h.$$

Strategin för att lösa en differentialekvation

$$y'' + ay' + by = h(t)$$

blir med hjälp av satsen följande.

1. Hitta på något sätt *en* lösning  $y_p$  till ekvationen (kallad partikulärlösning).
2. Bestäm *alla* lösningar  $y_h$  (kallade homogenlösningarna) till motsvarande homogena ekvation
$$y'' + ay' + by = 0$$
3. Den allmänna lösningen till den givna inhomogena ekvationen är nu  $y = y_p + y_h$ .

Upplägget är i fortsättningen att vi först behandlar de homogena ekvationerna och därefter de inhomogena.

## 2.3 Homogena ekvationer

Vi börjar med ett recept för att lösa homogena differentialekvationer och tittar efteråt på motiveringar till varför det fungerar.

För att lösa differentialekvationen

$$y'' + ay' + by = 0$$

löser man först den så kallade *karaktéristiska ekvationen*

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Detta är alltså en helt vanlig andragradsekvation så det finns två lösningar  $r_1$  och  $r_2$ . Vi måste nu dela upp i tre olika fall.

**Fall 1:  $r_1, r_2$  reella och olika.**

I detta fall är lösningen till den homogena differentialekvationen

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

där  $A$  och  $B$  är godtyckliga konstanter.

**Fall 2:  $r_1, r_2$  reella men lika.**

I detta fall kan vi sätta  $r_1 = r_2 = r$  och lösningen är

$$y = (A + Bt)e^{rt}$$

med  $A$  och  $B$  är godtyckliga konstanter.

**Fall 3:  $r_1, r_2$  komplexa.** I detta fall är rötterna av formen  $r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$  med  $\beta \neq 0$ . Lösningarna till differentialekvationen kan då skrivas

$$y = e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

där  $A$  och  $B$  är godtyckliga konstanter.

**2.3.1 Exempel på användningar av receptet**

**Exempel 2.3** Lös den homogena differentialekvationen

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Tillhörande karakteristiska ekvation är  $r^2 - r - 2 = 0$  med rötterna  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 2$ . Differentialekvationens allmänna lösning är därför

$$y = Ae^{-t} + Be^{2t}.$$

**Exempel 2.4** Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen  $r^2 - 4r + 4 = 0$  har dubbelroten  $r_1 = r_2 = 2$ . Differentialekvationen har därför den allmänna lösningen

$$y = (A + Bt)e^{2t}.$$

**Exempel 2.5** Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Ekvationen  $r^2 - 4r + 13 = 0$  har rötterna  $r_1, r_2 = 2 \pm 3i$ . Det innebär att differentialekvationens (reella) lösningar är

$$y = e^{2t}(A \cos 3t + B \sin 3t).$$

**2.3.2 Belysning av teorin**

Vi vet att lösningarna till

$$y' + ay = 0$$

ges av  $y = Ce^{-at}$ , där  $C$  är en godtycklig konstant.

Idén är att skriva om

$$y'' + ay' + by = 0,$$

så att den ser ut som en första ordningens differentialekvation.

Antag att  $r_1$  och  $r_2$  är rötterna till den karakteristiska ekvationen  $r^2 + ar + b = 0$ . Vänstra ledet kan då, med hjälp av faktorsatsen, skrivas  $(r - r_1)(r - r_2) = r^2 + ar + b$ . Genom att multiplicera ihop ser vi att  $a = -(r_1 + r_2)$  och  $b = r_1 r_2$ . Utnyttjar vi detta kan differentialekvationen skrivas

$$0 = y'' + ay' + by = (y' - r_1 y)' - r_2 (y' - r_1 y).$$

Sätter vi nu  $z = y' - r_1 y$  blir ekvationen

$$0 = z' - r_2 z,$$

som har lösningarna  $z = C_2 e^{r_2 t}$ , där  $C_2$  är en godtycklig konstant.

För att lösa  $y'' + ay' + by = 0$  återstår det nu att lösa

$$y' - r_1 y = C_2 e^{r_2 t}.$$

Ekvationen har den integrerande faktorn  $e^{-r_1 t}$ , så  $(ye^{-r_1 t})' = C_2 e^{(r_2 - r_1)t}$ .

Vi måste nu skilja på två fall för att kunna integrera högra ledet.

1.  $r_1 \neq r_2$ . Integration ger

$$ye^{-r_1 t} = B e^{(r_2 - r_1)t} + A,$$

där  $B = C_2/(r_2 - r_1)$  och  $A$  är en godtyckliga konstanter. Vi löser ut  $y$  och får

$$y = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t},$$

där  $A$  och  $B$  är godtyckliga konstanter.

2.  $r_1 = r_2$ . Integration ger nu

$$ye^{-r_1 t} = C_2 t + A.$$

Om vi kallar  $C_2$  för  $B$  och löser ut  $y$  får vi

$$y = (A + Bt)e^{r_1 t},$$

där  $A$  och  $B$  är godtyckliga konstanter.

I räkningarna har vi tillåtit  $r_1$  och  $r_2$  att vara komplexa tal (trots att talen  $a$  och  $b$  i den ursprungliga ekvationen normalt förutsätt vara reella tal).

Om  $r_1 = r_2$  ger sambandet  $a = -(r_1 + r_2) = -2r_1$ , att  $r_1 = r_2$  är reellt.

Den karaktäristiska ekvationen kan alltså bara ha lösningar som inte är reella om  $r_1 \neq r_2$ .

Om  $r_1 = \alpha + i\beta$ , där  $\alpha$  och  $\beta$  är reella, kommer  $r_2 = \alpha - i\beta$ . Använder vi nu att

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t).$$

får vi att

$$y = A_1 e^{r_1 t} + B_1 e^{r_2 t} = e^{\alpha t} ((A_1 + B_1) \cos \beta t + i(A_1 - B_1) \sin \beta t).$$

Här kan vi tänka oss att  $A_1$  och  $B_1$  också kan vara komplexa, så att med hjälp av dessa kan få fram vilka reella  $A$  och  $B$  som helst genom  $A_1 + B_1 = A$  och  $i(A_1 - B_1) = B$ . De reella lösningarna till differentialekvationen är därför

$$y = e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t).$$

## 2.4 Inhomogena ekvationer

Tidigare konstaterade vi att strategin för att lösa en differentialekvation

$$y'' + ay' + by = h(t)$$

är följande.

1. Hitta på något sätt en lösning  $y_p$  till ekvationen.
2. Bestäm alla lösningar  $y_h$  till motsvarande homogena ekvation

$$y'' + ay' + by = 0.$$

3. Den allmänna lösningen till den givna inhomogena ekvationen är nu  $y = y_p + y_h$ .



Eftersom vi nu klarar av steg 2, så är det som återstår för att fullständigt lösa en differentialekvation

$$y'' + ay' + by = h(t)$$

att hitta en enda lösning  $y_p$ . En sådan lösning kan ibland hittas med en lämplig typ av ansats. Vi ger först några exempel och formulerar sedan några riktlinjer.

**Exempel 2.6** Lös differentialekvationen  $y'' - y = t$ .

Med hjälp av den karakteristiska ekvationen vet vi att motsvarande homogena ekvation  $y'' - y = 0$  har lösningen  $y = Ae^t + Be^{-t}$ . För att hitta en partikulärlösning konstaterar vi att högerledet i  $y'' - y = t$  är ett förstgradspolynom och chansar på att det finns en lösning som också är ett förstgradspolynom. Vi ansätter därför  $y = at + b$  och försöker bestämma  $a$  och  $b$ , så att vi får en lösning till differentialekvationen. Med  $y = at + b$  får vi  $y' = a$  och  $y'' = 0$ . Vi sätter in i differentialekvationen och ser att vi vill ha  $0 - (at + b) = t$  för alla  $t$ . Genom att identifiera koefficienterna på båda sidor ser vi att vi får en lösning genom att ta  $a = -1$  och  $b = 0$ . En partikulärlösning  $y_p$  är alltså  $y_p(t) = -t$ . Detta ger att den fullständiga lösningen till differentialekvationen  $y'' - y = t$  är  $y = y_p + y_h = -t + Ae^t + Be^{-t}$ , där  $A$  och  $B$  är godtyckliga konstanter.

**Exempel 2.7** Lös differentialekvationen  $y'' - y = e^{2t}$ .

Den tillhörande homogena ekvationen är samma som i föregående exempel så dess lösningar kan vi redan. För att hitta en partikulärlösning ansätter vi  $y_p = ae^{2t}$  och försöker bestämma  $a$  så att vi har en lösning. Då är  $y'_p = 2ae^{2t}$  och  $y''_p = 4ae^{2t}$ . Därför vill vi ha en konstant  $a$  så att  $4ae^{2t} - ae^{2t} = e^{2t}$  dvs  $3ae^{2t} = e^{2t}$ . Detta inträffar om  $a = 1/3$  så en partikulärlösning  $y_p$  är därför  $y_p = e^{2t}/3$  och den allmänna lösningen därmed  $y = e^{2t}/3 + Ae^t + Be^{-t}$ .

**Exempel 2.8** Lös differentialekvationen  $y'' - y = t + e^{2t}$ .

Här kan vi utnyttja de två föregående exemplen. Med  $y_1 = -t$  och  $y_2 = e^{2t}/3$  gäller enligt de föregående exemplen

$$y''_1 - y_1 = t \quad \text{och} \quad y''_2 - y_2 = e^{2t}.$$

Nu sätter vi  $y_p = y_1 + y_2$  och ser att

$$y''_p - y_p = (y_1 + y_2)'' - (y_1 + y_2) = t + e^{2t}.$$

Alltså är  $y_p = -t + e^{2t}/3$  en partikulärlösning till ekvationen, som därför har den allmänna lösningen  $y = -t + e^{2t}/3 + Ae^t + Be^{-t}$ .

**Exempel 2.9** Bestäm en partikulärlösning till  $y'' - y = e^t$ .

För att försöka hitta en partikulärlösning ansätter vi  $y_p = ae^t$ . Men detta leder till  $y''_p - y_p = 0$  så vi kan aldrig få ett  $a$  så att  $y''_p - y_p = e^t$ . Det krävs alltså en annan typ av funktion för att få en partikulärlösning. Ett sätt att försöka förenkla problemet är att införa en ny funktion  $u$  genom  $y = e^t u$ . Detta leder till att  $y' = e^t u' + e^t u = e^t(u' + u)$  och  $y'' = e^t(u'' + u') + e^t(u' + u) = e^t(u'' + 2u' + u)$ . Eftersom detta ger  $y'' - y = e^t(u'' + 2u')$  så har vi  $y'' - y = e^t$  precis när

$$u'' + 2u' = 1.$$

Här är högerledet en konstant och vi ansätter  $u'_p$  som en konstant eftersom det inte finns något  $u$  i vänsterledet. Med  $u'_p = a$  får vi  $u'' = 0$  och i ekvationen  $u'' + 2u' = 1$  får vi  $0 + 2a = 1$  dvs  $a = 1/2$ . Vi vill alltså ha en funktion  $u_p$  så att  $u'_p = 1/2$ . Det får vi genom att ta  $u_p = t/2$ . En partikulärlösning till den ursprungliga differentialekvationen är därför

$$y_p = \frac{t}{2} \cdot e^t$$

**Exempel 2.10** Bestäm en partikulärlösning till

$$y'' - y' - 2y = \sin t.$$

Derivator av  $\sin t$  och  $\cos t$  ger upphov till nya uttryck i  $\sin t$  och  $\cos t$ . Man kan därför hoppas på att en ansats av typen

$$y_p = a \sin t + b \cos t$$

skall kunna ge oss en partikulärlösning. Denna ansats leder till

$$\begin{aligned} y_p &= a \sin t + b \cos t \\ y_p' &= a \cos t - b \sin t \\ y_p'' &= -a \sin t - b \cos t \end{aligned}$$

vilket innebär att

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = (-3a + b) \sin t + (-3b - a) \cos t.$$

Vi har därför en lösning till

$$y'' - y - 2y = \sin t$$

om

$$\begin{cases} -3a + b = 1 \\ -a - 3b = 0. \end{cases}$$

Detta system har lösningen  $a = -3/10$  och  $b = 1/10$ , så en partikulärlösning till differentialekvationen är

$$y_p = -\frac{3}{10} \sin t + \frac{1}{10} \cos t.$$

Av exemplen kan vi dra följande slutsatser om hur man kan försöka hitta partikulärlösningar.

|                                                                                                             |                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| $h(t)$ polynom                                                                                              | ansätt $y$ polynom av samma grad.     |
| $h(t) = ce^{kt}$                                                                                            | ansätt $y = ae^{kt}$                  |
| $h(t) = c \sin kt + d \cos kt$                                                                              | ansätt $h(t) = a \sin kt + b \cos kt$ |
| Man kan bli av med en faktor $e^{kt}$ i högerledet, genom att införa en ny funktion $u$ genom $y = e^{kt}u$ |                                       |

## 3 Serier och talföljder

### 3.1 Talföljder

En *talföljd* (eller följd eller sekvens av tal) är en oändlig uppräknings av reella tal:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Observera att det inte finns något krav på att talen i uppräknings ska vara olika.

Exempelvis är  $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots$  en talföljd. Ett sätt att ange en talföljd är att, som ovan, räkna upp de första talen och sedan hoppas att läsaren förstår fortsättningen. Ett annat är att ge en definition av det  $n$ :te talet i följden. Exempelvis kan man ange en följd genom att säga att  $a_n$  är det  $n$ :te primtalet i storleksordning. Ett annat exempel får man om man sätter  $a_n = 1/n$ , där  $n > 0$ . I detta fall avses följden  $1/1, 1/2, 1/3, \dots$ . I definitionen av talföljd ovan har vi förutsatt att det första talet i följden har index 1. Detta är inte nödvändigt. Man kan använda vilket heltal som helst som första index.

**Definition 3.1** En talföljd  $a_n$  är konvergerar mot ett tal  $A$ , om det för varje  $\epsilon > 0$ , finns ett heltal  $N$  med egenskapen att  $|a_n - A| < \epsilon$ , när  $n \geq N$ .

Man skriver då  $a_n \rightarrow A$ , när  $n \rightarrow \infty$ , eller  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

Ett alternativt sätt att formulera detta är att talföljden  $a_n$  konvergerar mot  $A$  om varje omgivning till  $A$  innehåller alla  $a_n$  utom för ändligt många index  $n$ . Detta är *inte* det samma som att säga att varje omgivning till  $A$  innehåller alla *tal* i följden utom ändligt många. Exempelvis innehåller varje omgivning till 1 alla utom ändligt många av talen i följden  $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots$ . Men om omgivningen till 1 inte innehåller talet 0 kommer *uppräknings* av talen att ge tal (dvs 0) utanför omgivningen oändligt många gånger.

Om en talföljd inte konvergerar mot något tal är den *divergent*.

Exempelvis är talföljden  $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots$  divergent, medan talföljden  $1/n$  är konvergent med gränsvärdet 0.

En talföljd  $a_n$  är *växande* om varje tal i uppräkningsen är större (eller lika med) sin föregångare:  $a_n \leq a_{n+1}$  (för varje  $n$ ). Den är *avtagande* om det motsatta förhållandet gäller. En följd som antingen är växande eller avtagande kallas *monoton*.

En talföljd  $a_n$  är uppåt (nedåt) begränsad om det finns ett tal som är större (mindre) än alla talen i uppräkningsen.

**Exempel 3.1** Följden  $a_n = 1 - 1/n$  är växande och uppåt begränsad av 1, medan följden  $a_n = -n$  är avtagande, uppåt begränsad av 0 men inte nedåt begränsad.

**Sats 3.1** Varje uppåt begränsad växande talföljd är konvergent.

På samma vis är varje nedåt begränsad avtagande följd konvergent.

**Bevis.** Låt  $a_n$  beteckna talföljden. Mängden av tal som ingår i den är uppåt begränsad och har därför en minsta övre begränsning  $a$ . En omgivning till  $a$  innehåller något tal  $a_{n_0}$  ur talföljden, eftersom  $a$  är den minsta övre begränsningen. Eftersom följden är växande gäller att  $a_{n_0} \leq a_n \leq a$ , när  $n \geq n_0$ , så varje omgivning till  $a$  innehåller alla  $a_n$  utom för ändligt många index  $n$ . ■

## 3.2 Allmänt om serier

När  $a_n$  är en talföljd kallas uttrycket

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

för en *serie*. Serien här börjar med index  $i = 0$ , men det är inte nödvändigt. När inga missförstånd anses kunna uppstå skrivs vänstra ledet ovan ofta  $\sum_i a_i$ , så att man själv får begripa med vilket värde på  $i$  man börjar och att  $i$  fortsätter mot  $\infty$ .

Det är viktigt att förstå att oändligt många tal inte alltid kan summeras till något vettigt. Talföljden  $n$  ger serien  $1 + 2 + \dots + n + \dots$  som förstås inte kan summeras till något vettigt. Inte heller talföljden  $1/n$  kan summeras, men det är svårare att förstå. Däremot kan serien man får av talföljden  $1/n^2$  beräknas. Ett berömt resultat är nämligen

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2 + \dots = \pi^2/6.$$

Men, vad ska egentligen likheten i detta betyda? Vad betyder det att summera oändligt många termer?

Till serien  $\sum a_i$  kan man bilda så kallade partialsummor (eller delsummor). Den  $n$ :te partialsumman är

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Den femte partialsumman till  $\sum_i 1/i^2$  är t.ex.  $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 = 5269/3600$ .

Det är naturligt att försöka definiera serien summa som gränsvärdet av partialsummorna:

**Definition 3.2** En serie  $\sum_i a_i$  är konvergent om följden av dess partialsummor  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  är konvergent. Annars är den divergent.

Om serien är konvergent och gränsvärdet av partialsummorna är  $S$  säger vi att seriens *summa* är  $S$  och skriver  $\sum_i a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

En viktig serie är den *geometrisk* serien. Låt  $x$  vara ett tal  $\neq 1$ . Serien  $\sum_i x^i$  har då partialsumman  $S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ . Man ser genom multiplikation att  $(1-x)S_n = 1 - x^{n+1}$ , så  $S_n = (1 - x^{n+1})/(1-x)$ . När  $x = 1$  är  $S_n = n + 1$ .

Av detta ser vi att  $S_n$  har ett gränsvärde  $(1/(1-x))$  bara när  $|x| < 1$ .

Serien  $\sum_i x^i$  är konvergent med summan

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

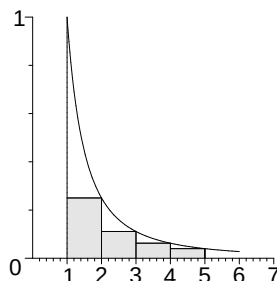
när  $|x| < 1$  och divergent annars.

**Exempel 3.2** Serien  $\sum_{i=1} 1/i^2$  är konvergent.

Dess partialsummor  $S_n$  bildar en växande följd av tal som är uppåt begränsad. Vi har nämligen (se figuren nedan)

$$S_n = 1 + 1/2^2 + \dots + 1/n^2 \leq 1 + \int_1^n 1/x^2 dx = 1 + \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^n = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Vi har därmed sett att seriens summa har mening, men inte lyckats beräkna den. Att summan blir  $\pi^2/6$  är väsentligt svårare att visa.



**Sats 3.2** Om serien  $\sum_i a_i$  är konvergent, så gäller att  $a_n \rightarrow 0$ , när  $n \rightarrow \infty$ .

**Bevis.** Om  $S_n$  betecknar seriens  $n$ :te partialsumman, så vet vi att följden  $S_n$  har ett gränsvärde  $S$ , när  $n \rightarrow \infty$ . Följden  $S_{n+1}$  har förstås samma gränsvärde  $S$ . Vi har

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \rightarrow S - S = 0,$$

när  $n \rightarrow \infty$ . ■

Det är viktigt att förstå att omvändningen till satsen *inte* gäller (i allmänhet).

**Exempel 3.3** Serien  $\sum_{i=0} e^{1/i}$  är divergent, eftersom  $e^{1/n}$  har gränsvärdet 1 när  $n \rightarrow \infty$ .

**Exempel 3.4** Serien  $\sum_{i=1} 1/i$  är divergent trots att  $1/n \rightarrow 0$ , när  $n \rightarrow \infty$ .

Serens partialsummor bildar nämligen en växande följd som inte är uppåt begränsad:

$$S_n = 1/1 + 1/2 + \dots + 1/n \geq \int_1^{n+1} 1/x dx = \ln(n+1)$$

Eftersom  $\ln(n+1) \rightarrow \infty$  gör även  $S_n$  det, när  $n \rightarrow \infty$ .

En serie  $\sum_i a_i$ , där alla termer  $a_n$  är  $> 0$  kallas för en *positiv* serie.

En serie där termerna turas om att vara  $> 0$  och  $< 0$  kallas en *alternerande* serie. En sådan kan skrivas  $\sum_i (-1)^i a_i$ , där alla  $a_n$  är  $> 0$ . För alternerande serier gäller

**Sats 3.3** Om  $\sum_{i=0} (-1)^i a_i$  är en alternerande serie där  $a_n > 0$  är en följd som *avtar* mot 0, så är serien konvergent.

**Bevis.** Enligt förutsättningen gäller  $0 < a_{n+1} < a_n$ , för alla  $n$ . Vi har

$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + \dots + (a_{2n} - a_{2n+1}) = S_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) > S_{2n-1},$$

så de *udda* partialsummorna bildar en växande följd. Den är uppåt begränsad eftersom

$$S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - \dots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1} < a_0$$

Låt  $S$  vara gränsvärdet av dessa *udda* partialsummor när  $n \rightarrow \infty$ . Vi har  $S_{2n} = S_{2n+1} + a_{2n+1}$ . Eftersom  $a_n \rightarrow 0$  ser vi nu att även de *jämna* partialsummorna har gränsvärdet  $S$ , när  $n \rightarrow \infty$ . Därmed är serien konvergent. ■

**Exempel 3.5** Serien  $\sum_i (-1)^i / i$  är konvergent eftersom den är alternerande och följden  $1/n$  avtar mot 0.

### 3.3 Positiva serier

Det kan kännas nedslående att det är svårt att beräkna seriers summor även om vi vet att de är konvergenta. Men det är tillräckligt intressant att kunna avgöra om en serie konvergerar eller divergerar för att det ska vara mödan värt att systematisera frågan. För en positiv serie är följderna av partialsummor  $S_n$  växande och är därför konvergent precis när den är uppåt begränsad. Detta faktum gör att frågan om konvergens för positiva serier är särskilt enkel att besvara i flera fall. Det räcker att avgöra om följderna av partialsummor är uppåt begränsade eller ej.

#### 3.3.1 Jämförelsekriterier

**Sats 3.4 (integralkriteriet)** Antag att det finns en *avtagande* kontinuerlig funktion  $f(x) > 0$ , så att  $f(n) = a_n$ . Då är  $\int_0^\infty f(x) dx$  och  $\sum_{i=0}^\infty a_i$  antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

Här är valet av den nedre gränsen till 0 oväsentligt; det fungerar lika bra med vilket (hel)tal som helst.

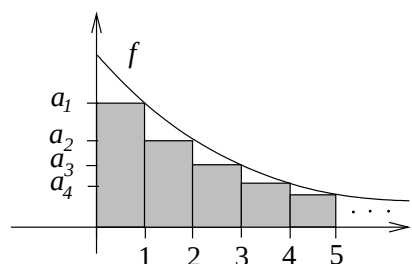


Fig 4.  $S_5 - a_0$  är en undersumma till  $\int_0^5 f(x) dx$ .

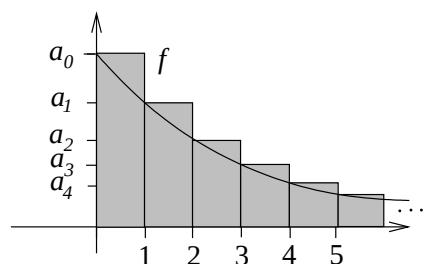


Fig 5.  $S_5$  är en översumma till  $\int_0^5 f(x) dx$ .

**Bevis** Antag först att integralen konvergerar. Om vi delar in intervallet  $[0, n]$  i  $n$  lika stora delar så är  $S_n - a_0$ , där  $S_n$  är  $n$ :te partialsumman till serien, samtidigt en undersumma till  $f(x)$  på  $[0, n]$ , så

$$S_n - a_0 \leq \int_0^n f(x) dx.$$

Detta ger  $S_n \leq a_0 + \int_0^\infty f(x) dx$ , så den växande följderna  $S_n$  är uppåt begränsad och därför konvergent.

Antag sedan att serien konvergerar. Dela in  $[0, n+1]$  i  $n+1$  lika stora delar. Då är seriens  $n$ :te partialsumma  $S_n$  en översumma till  $f(x)$  på  $[0, n+1]$ . Eftersom  $S_n$  är uppåt begränsad (av gränsvärdet  $S$ ), är även  $\int_0^\omega f(x) dx$  (som växer med  $\omega$ ) uppåt begränsad. Alltså har  $\int_1^\omega f(x) dx$  ett gränsvärde när  $\omega \rightarrow \infty$ , och  $\int_0^\infty f(x) dx$  är konvergent. ■

En viktig slutsats är

|                                                        |                                     |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Serien                                                 | $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ |
| är divergent när $p \leq 1$ och konvergent när $p > 1$ |                                     |

Man jämför serien med  $\int_1^\infty (1/x^p) dx$ .

**Sats 3.5 (Jämförelsekriteriet)** Antag att  $\sum_i a_i$  och  $\sum_i b_i$  är positiva serier med  $a_n \leq b_n$ , för alla  $n$ . Om  $\sum_i a_i$  är divergent så är  $\sum_i b_i$  divergent. Om  $\sum_i b_i$  är konvergent så är  $\sum_i a_i$  konvergent.

**Bevis.** Låt  $S_n$  och  $T_n$  beteckna partialsummorna till  $\sum_i a_i$  respektive  $\sum_i b_i$ . Båda dessa följderna är växande och förutsättningarna ger  $S_n \leq T_n$  för alla  $n$ .

Om första serien är divergent är  $S_n$  inte uppåt begränsad och då kan heller inte  $T_n$  vara det. Alltså är även andra serien divergent.

Om andra serien är konvergent är följden  $T_n$  uppåt begränsad och därmed är även  $S_n$ . Detta ger att första serien är konvergent. ■

**Exempel 3.6** Serien  $\sum_i \cos^2(i)/i^2$  är konvergent.

Vi jämför med  $\sum_i 1/i^2$  som vi vet är konvergent och utnyttjar att  $\cos^2(n)/n^2 \leq 1/n^2$ .

**Sats 3.6 (Kvotkriteriet)** Låt  $\sum_i a_i$  vara en positiv serie, sådan att  $a_{n+1}/a_n$  har ett gränsvärde  $L$ , när  $n \rightarrow \infty$ . Om  $L < 1$  är serien konvergent. Om  $L > 1$  är den divergent. Ingen slutsats kan dras om  $L = 1$ .

**Bevis.** Vi ska jämföra serien med en geometrisk serie. Antag först att  $a_{n+1}/a_n \rightarrow L < 1$ . Välj ett tal  $r$  mellan  $L$  och  $1$ :  $L < r < 1$ . För stora värden på  $n$ , låt oss säga  $n \geq n_0$ , kommer då  $a_{n+1}/a_n$  att vara  $< r$ . Detta ger att  $a_{n+1} < a_n r$ , när  $n \geq n_0$ . Vi får  $a_{n_0+1} < a_{n_0} r$  och sedan  $a_{n_0+2} < a_{n_0+1} r < a_{n_0} r^2$ . Uppprepning ger  $a_{n_0+k} < a_{n_0} r^k$ . För partialsumman  $S_n$  gäller alltså när  $n \geq n_0$  att

$$S_n = S_{n_0-1} + (a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n) < S_{n_0-1} + a_{n_0}(1 + r + \dots + r^{n-n_0}).$$

Eftersom  $r < 1$  är den geometriska serien  $\sum_i r^i$  konvergent. Det följer att även  $S_n$  är konvergent och alltså är serien konvergent.

När  $a_{n+1}/a_n \rightarrow L > 1$  gäller att  $a_{n+1} > a_n$ , när  $n$  är stort. Alltså kan  $a_n$  inte gå mot  $0$ , när  $n \rightarrow \infty$ , så serien är divergent. ■

**Exempel 3.7** Avgör för vilka  $a > 0$ , som  $\sum_{i=1} a^i/i$  är konvergent.

Med  $a_n = a^n/n$  har vi  $a_{n+1}/a_n = a/(n+1)$  som har gränsvärdet  $a$ , när  $n \rightarrow \infty$ . Serien är alltså konvergent när  $a < 1$  och divergent när  $a > 1$ . När  $a = 1$  är serien divergent.

**Exempel 3.8** Serien  $\sum_{i=1} 1/i^2$  är konvergent och  $a_{n+1}/a_n = (n/(n+1))^2 \rightarrow 1$ , när  $n \rightarrow \infty$ .

De två senaste exemplen illustrerar att ingen slutsats kan dras när  $L = 1$ .

### 3.4 Allmänna serier

En serie  $\sum_i a_i$ , där inget särskilt antas om tecknet på  $a_i$ , är *absolutkonvergent* om (den positiva) serien  $\sum_i |a_i|$  är konvergent.

T.ex. är  $\sum_{i=1} \cos(i)/i^2$  absolutkonvergent. Vi har nämligen att  $\sum_{i=1} |\cos(i)/i^2|$  är konvergent om vi jämför med den större konvergenta serien  $\sum_{i=1} 1/i^2$ .

**Sats 3.7** Om  $\sum_i a_i$  är absolutkonvergent, så är den också konvergent.

**Bevis.** Tricket är att skriva serien som en skillnad av två konvergenta positiva serier. Vi har  $a_n = |a_n| - (|a_n| - a_n)$ , så

$$\sum_i a_i = \sum_i |a_i| - \sum_i (|a_i| - a_i).$$

Båda serierna i högra ledet är positiva och den första är konvergent enligt antagandet. För den andra har vi  $|a_n| - a_n < 2|a_n|$ , så jämförelsekriteriet ger att även denna är konvergent. ■

**Exempel 3.9** Serien  $\sum_{i=1} \cos(i)/i^2$ , som varken är alternerande eller positiv, är konvergent eftersom den är absolutkonvergent.

En serie som är konvergent men inte absolutkonvergent sägs vara *betingat* konvergent. Ett exempel på en sådan är den alternerande serien  $\sum_{i=1} (-1)^i/i$ .

## 4 Potensserier

### 4.1 Allmänt om potensserier

En serie av formen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ , där  $x$  är en variabel och  $a$  ett tal, kallas en *potensserie* (kring  $a$ ). Talen  $a_n$  (som antas kända) kallas seriens *koefficienter*. I potensserier är det viktigt att man startar indiceringen så att inga negativa potenser av  $x$  förekommer.

Det första problemet som dyker upp är att försöka bestämma för vilka  $x$  som serien kan summeras till ett tal: för vilka värden på  $x$  konvergerar serien?

Man kan tänka på potensserier som en generalisering av polynom. Seriens partialsummor är polynom med variabeln  $x$ . Generaliseringen består naturligtvis i att vi nu tillåter oss att ta med oändligt många termer. Nackdelen blir då förstas att vi inte kan vara säkra på att serien summerar till ett tal för givet  $x$ .

Vi har flera gånger råkat ut för att de elementära funktionerna inte räcker till för att genomföra kalkyler. Ur denna synvinkel kan vi tacksamt ta emot potensserier som ett nytt (och stort) tillskott av funktioner med definitionsmängd de  $x$  för vilka de konvergerar.

**Sats 4.1** Antag att  $\sum_i a_i x^i$  konvergerar för  $x = x_0$ . Då är serien (absolut)konvergent när  $|x| < |x_0|$ .

Om vi ersätter  $x$  med  $x - a$  i serien ser vi att om  $\sum_i a_i(x-a)^i$  konvergerar för  $x = x_0$ , konvergerar den (absolut) när  $|x-a| < |x_0-a|$ .

**Bevis.** Idén är att jämföra  $\sum_i |a_i x^i|$  med en geometrisk serie.

Från förutsättningen får vi att  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ . Det betyder att talföljden  $a_n x_0^n$  är begränsad. Låt oss säga att  $|a_n x_0^n| < M$ , för alla  $n$ .

Antag att  $|x| < |x_0|$  och sätt  $r = |x|/|x_0| < 1$ . Vi har då att  $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| r^n < M r^n$ . Eftersom  $r < 1$  konvergerar den geometriska serien  $M \sum_i r^i$  och därmed även den mindre (positiva) serien  $\sum_i |a_i x^i|$ . ■

Av satsen följer det att ett av följande ömsesidigt uteslutande fall kan inträffa för en potensserie  $\sum_i a_i(x-a)^i$ :

1. Serien är absolutkonvergent för alla  $x$ ,
2. det finns ett tal  $R > 0$ , så att serien är absolutkonvergent för alla  $x$  sådana att  $|x-a| < R$  och divergent för alla  $x$  med  $|x-a| > R$
3. serien konvergerar bara när  $x = 0$ .

Talet  $R$  kallas seriens *konvergensradie* och det är brukligt att sätta  $R = \infty$  i fall 1) och  $R = 0$  i fall 2).

Om vi tänker på en potensserie  $\sum_i a_i(x-a)^i$  som en funktion, är den alltså definierad för alla  $x$  sådan att  $|x-a| < R$ , där  $R$  är seriens konvergensradie. Den är definitivt inte definierad när  $|x-a| > R$ . Mängden (som bestäms av)  $|x-a| < R$  är ett symmetriskt intervall runt  $a$  där ändpunkterna  $a \pm R$  inte ingår. Beträffande ändpunkterna så kan ingen av dem, en men inte den andra eller båda ingå i potensseriens definitionsmängd. De  $x$  för vilka serien konvergerar kallas seriens *konvergensintervall*.

För bestämma en series konvergensradie kan man ofta använda kvotkriteriet för positiva serier.

**Sats 4.2** Om  $|a_{n+1}/a_n| \rightarrow L$ , när  $n \rightarrow \infty$ , så har potensserien  $\sum_i a_i(x-a)^i$  konvergensradien  $R = 1/L$ .

Här ska  $1/L$  tolkas som  $R = \infty$  när  $L = 0$  och som  $R = 0$ , när  $L = \infty$ .

**Bevis.** Vi har, enligt förutsättningen, att  $|a_{n+1}(x-a)^{n+1}/(a_n(x-a)^n)| = |a_{n+1}/a_n| |x-a|$  har gränsvärdet  $L|x-a|$ .

Enligt kvotkriteriet konvergera därför potensserien (absolut) när  $L|x-a| < 1$  och divergerar när  $L|x-a| > 1$ .

Detta ger konvergens när  $|x-a| < 1/L$  och divergens när  $|x-a| > 1/L$ , så konvergensradien är  $R = 1/L$ . ■

**Exempel 4.1** För vilka  $x$  konvergerar potensserien

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{i}{1-i^2} (x-2)^i?$$

Vi har här att  $|a_{n+1}/a_n| = (1 + 1/n)(n^2 - 1)/(n^2 + 2n)$ , som har gränsvärdet  $L = 1$ , när  $n \rightarrow \infty$ . Konvergensradien är  $R = 1/L = 1/1$ . Serien konvergerar alltså (absolut) när  $|x - 2| < 1$ .

När  $x = 1$  får vi den alternerande serien  $\sum_{i=2} (-1)^i i / (1 - i^2)$  med termer som avtar mot 0 och därför är konvergent.

När  $x = 3$  får vi  $-\sum_{i=2} i / (i^2 - 1)$ . Eftersom  $n/(n^2 - 1) > n/n^2 = 1/n$  och serien  $\sum_{i=2} 1/i$  är divergent är potensserien divergent när  $x = 3$ .

Potensserien konvergerar alltså när  $x$  ligger i intervallet  $[1, 3]$ . □

Det vara på sin plats att påpeka att man inte behöver använda sats 4.2 för att bestämma konvergensradien. Om man i stället i exemplet använder kvotkriteriet för vanliga serier får man kvoten

$$\left| \frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{1-(n+1)^2} \cdot \frac{1-n^2}{n(x-2)^n} \right|$$

som har gränsvärdet  $|x-2|$ , när  $n \rightarrow \infty$ . Det betyder att serien konvergerar när  $|x-2| < 1$  och divergerar när detta uttryck är  $> 1$ . Potensserien konvergerar alltså för alla  $x$ . Det ger konvergensradien 1.

**Exempel 4.2** Bestäm konvergensradien till

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 4^n (x-a)^{3n}.$$

Observera att i detta exempel är bara var tredje koefficient  $\neq 0$ , så kvoten av koefficienter  $|a_{n+1}/a_n|$  saknar gränsvärde (är inte ens alltid definierad). Vi använder det vanliga kvotkriteriet och får kvoten

$$\left| \frac{4^{n+1}(x-a)^{3(n+1)}}{4^n(x-a)^{3n}} \right|,$$

som har gränsvärdet  $4|(x-a)|^3$  när  $n \rightarrow \infty$ . Enligt kvotkriteriet har vi konvergens när  $4|(x-a)|^3 < 1$ , dvs när  $|(x-a)| < 4^{-1/3}$  och divergens när  $4|(x-a)|^3 > 1$ . Potensseriens konvergensradien är alltså  $R = 4^{-1/3}$ . □

**Exempel 4.3** Bestäm konvergensradien till  $P(x) = \sum_{i=0} a_i x^i$ , där

$$a_n = \begin{cases} 4^n & \text{när } n \text{ är jämnt} \\ 4^{-n} & \text{när } n \text{ är udda} \end{cases}$$

Även här saknar  $a_{n+1}/a_n$  gränsvärde. Vi löser problemet genom att skriva  $P(x)$  som en summa av två potensserier.

$$P(x) = \sum_i 4^{2i} x^{2i} + \sum_i 4^{-2i-1} x^{2i+1}$$

Här har  $p_1(x) = \sum_i 4^{2i} x^{2i}$  konvergensradien  $1/4$ , medan  $p_2(x) = \sum_i 4^{-2i-1} x^{2i+1}$  har konvergensradien 4. Det betyder att  $P(x)$  konvergerar när  $|x| < 1/4$ .

När  $4 > |x| > 1/4$  divergerar  $p_1(x)$ , medan  $p_2(x)$  konvergerar. Alltså kan inte  $P(x)$  konvergera (för då hade  $p_1(x) = P(x) - p_2(x)$  konvergerat) när  $4 > |x| > 1/4$ .

Potensserien  $P(x)$  har alltså konvergensradien  $1/4$ .

## 4.2 Derivering av potensserier

Som tidigare nämnts kan vi tänka på potensserier som ett tillskott till vårt förråd av funktioner. Det blir därför naturligt att fråga om sådana funktioner är deriverbara och om vi kan bestämma primitiva funktioner till dem.

Det visar sig att potensserier går utmärkt att derivera (inuti sina konvergensintervall). I själva verket går de att derivera hur många gånger som helst! För att förstå detta kan man använda följande sats upprepade gånger.

**Sats 4.3 (Termvis derivering)** Antag att  $P(x) = \sum_{i=0} a_i x^i$  har konvergensradie  $R > 0$ . Då är  $P(x)$  deriverbar när  $|x| < R$  och

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}.$$



Satsen innehåller (bland annat) påstandet att högra ledet i likheten ovan konvergerar när  $|x| < R$ . Den "termvisa derivatan" har alltså en konvergensradie som är minst lika stor som den ursprungliga potensserien. Om vi kombinerar sats 4.3 med sats 4.4 som vi ska visa senare ser vi att  $P'(x)$  och  $P(x)$  i själva verket har **samma konvergensradie**.

Genom att ersätta  $x$  med  $x - a$  ser vi att vi också kan derivera  $P(x - a) = \sum_i a_i(x - a)^i$  termvis. Derivatan blir  $\sum_i i a_i(x - a)^{i-1}$ .

För att visa satsen ska vi beräkna gränsvärdet av differenskvoten

$$\frac{P(x + h) - P(x)}{h} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{(x + h)^i - x^i}{h}$$

när  $h \rightarrow 0$ . Här stöter vi på patrull! Summan är definierad som ett gränsvärde, så vi har två olika gränsvärden staplade på varandra. När man har den situationen kan man inte utan vidare kasta om ordningen i vilken man tar gränsvärdena som följande exempel visar.

**Exempel 4.4** Vi har

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{x + y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

men

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x + y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Vi delar upp beviset i tre steg.

**Lemma 4.1 (Steg 1)** Om  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  har konvergensradien  $R > 0$ , så är  $\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$ , (absolut)konvergent när  $|x| < R$ .

Genom upprepad användning ser vi att även  $\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i x^{i-2}$  är konvergent när  $|x| < R$ .

**Bevis.** Välj ett  $r$  så att  $|x| < r < R$ . Eftersom  $|x|/r < 1$  har vi att  $(|x|/r)^{n-1}$  är en exponentiellt avtagande funktion av  $n$ . Detta ger att  $n(|x|/r)^{n-1} \rightarrow 0$ , när  $n \rightarrow \infty$ ; en exponentialfunktion dominerar ju över ett polynom.

Följden  $n(|x|/r)^{n-1}$  är alltså begränsad. Låt oss säga att  $n(|x|/r)^{n-1} < M$ , för alla  $n$ .

Vi får nu

$$n|a_n||x|^{n-1} = n|a_n|r^{n-1} \left( \frac{|x|}{r} \right)^{n-1} < M|a_n|r^{n-1}$$

Eftersom  $0 < r < R$  är  $\sum_i |a_i|r^{i-1} = (1/r) \sum_i |a_i|r^i$  konvergent. Jämförelsekriteriet ger nu att  $\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$ , är (absolut)konvergent när  $|x| < R$ . ■

Vi ska visa att satsen genom att visa att

$$(P(x + h) - P(x))/h - \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = \sum_{i=2}^{\infty} a_i \left( \frac{(x + h)^i - x^i}{h} - i x^{i-1} \right)$$

har gränsvärdet 0, när  $h \rightarrow 0$ . Tricket är att försöka få ut ett  $h$  utanför serien så att serien som blir kvar är oberoende av  $h$  och konvergerar.

Det väsentliga steget är

**Lemma 4.2 (Steg 2)** När  $n \geq 2$ , finns det ett tal  $b$  mellan  $x$  och  $x + h$ , så att

$$\left| \frac{(x + h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \right| < |h| n(n-1) |b|^{n-2}.$$

**Bevis.** Medelvärdessatsen ger ett  $a$  mellan  $x$  och  $x + h$ , så att

$$\frac{(x + h)^n - x^n}{h} = n a^{n-1}$$

Samma sats ger ett  $b$  mellan  $x$  och  $a$  (och alltså mellan  $x$  och  $x + h$ ), så att

$$\frac{(x + h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} = n a^{n-1} - n x^{n-1} = n(n-1)(a-x)b^{n-2}.$$

Eftersom  $a$  ligger mellan  $x$  och  $x + h$  har vi  $|x - a| < |h|$ , och påståendet följer. ■

**Bevis av sats 3.3** Antag att  $|x| < R$  och välj ett  $r$  så att  $|x| < r < R$ . Vi kan förutsätta att  $h$  är så litet att  $|x| + |h| < r$ . Av detta följer att alla tal mellan  $x$  och  $x + h$  har absolutbelopp  $< r$ .

Vi

$$Q = (P(x+h) - P(x))/h - \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=2}^{\infty} a_i \left( \frac{(x+h)^i - x^i}{h} - i x^{i-1} \right).$$

och från steg 2 har vi nu att

$$\left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \right| < |h| n(n-1) r^{n-2}.$$

Tillsammans ger detta

$$|Q| < \sum_{i=2}^{\infty} \left| a_i \left( \frac{(x+h)^i - x^i}{h} - i x^{i-1} \right) \right| < |h| \sum_{i=2}^{\infty} |a_i| i(i-1) r^{i-2}$$

Den sista serien är konvergent (och oberoende av  $h$ ) enligt steg 1. Vi ser tillsist att  $Q \rightarrow 0$ , när  $h \rightarrow 0$ . ■

### 4.3 Några ”välkända” serier

Vi ska nu se att slitet i förra avsnittet var mödan värt. De mest fantastiska samband kommer att uppenbara sig! Vi kommer t.ex. att kunna räkna ut  $\ln(3/2)$  med god approximation bara genom att addera, multiplicera och dividera. Lika så kommer vi att kunna beräkna  $\sin(1)$  utan att mäta på en enhetscirkel.

I detta avsnitt kommer vi flera gånger att använda symbolen  $n!$ , (där  $n$  är ett naturligt tal,) som betyder produkten av alla heltal  $1, 2, \dots, n$ , dvs  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ . Man brukar också sätta  $0! = 1$  av praktiska skäl.

Vi börjar med potensserien  $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i / i!$ . Kvotkriteriet ger konvergensradien  $R = \infty$ . Potensserien är alltså (absolut)konvergent för alla  $x$ .

Termvis derivering ger  $P'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1} / (i-1)!$  (giltigt för alla  $x$ ) som faktiskt är  $P(x)$ , med annan indicering. Vi har alltså  $P'(x) = P(x)$ , så  $P(x) = C e^x$ , för någon konstant  $C$ .

Men  $P(0) = 1$ , så  $P(x) = e^x$  (för alla värden på  $x$ ). I ett slag har vi beräknat oändligt många (en för varje reellt tal  $x$ ) oändliga summor!

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \text{ för alla } x$$

Vi låter  $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{2i} / (2i)!$  och ser att  $P'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i x^{2i-1} / (2i-1)!$  och  $P''(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i x^{2(i-1)} / (2(i-1))!$  som är  $-P(x)$ , med annan indicering. Detta ger  $P''(x) = -P(x)$  och sedan  $P(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ .

Men  $P(0) = 1$  och  $P'(0) = 0$ , så  $A = 1$  och  $B = 0$ , så  $P(x) = \cos(x)$ . Detta är giltigt när  $x$  har  $|x| < R$ , där  $R$  är konvergensradien för  $P(x)$ .

Kvoten av absolutbeloppet av två på varandra följande termer i  $P(x)$  är  $|x^2| (2n+2)^{-1} (2n+1)^{-1}$  som har gränsvärdet 0, när  $n \rightarrow \infty$ . Detta ger att  $P(x)$  har oändlig konvergensradie. Vi får alltså

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2i!} = \cos(x) \text{ för alla } x$$

Derivering av detta ger  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i x^{2i-1} / (2i-1)! = -\sin x$ , för alla  $x$ . Ny indicering ger sedan

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sin(x) \text{ för alla } x$$

För att komma vidare behöver vi en konsekvens av sats 3.3 av generell karaktär.

**Sats 4.4 (Termvis integration)** Om  $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$  har konvergensradie  $R$ , så är

$$\int P(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{(x-a)^{i+1}}{i+1} + C$$

när  $|x - a| < R$ .

**Bevis.** Enligt sats en om termvis derivering är derivatan av högra ledet  $P(x)$ .

För att få påståendet om giltigheten att stämman måste vi visa att serien i högra ledet är (absolut)konvergent när  $|x - a| < R$ , dvs att konvergensraden inte minskar vid termvis integration.

Vi har att  $P(x)$  är absolutkonvergent när  $|x - a| < R$ . Sätt

$$Q(x) = \sum_{i=0} a_i(x-a)^{i+1}/(i+1) = (x-a) \sum_{i=0} a_i(x-a)^i/(i+1).$$

Eftersom

$$\frac{|a_n||x-a|^n}{n+1} \leq |a_n||x-a|^n$$

är även  $Q(x)$  absolutkonvergent när  $|x - a| < R$ . ■

Vi har  $\sum_{i=0} x^i = 1/(1-x)$ , när  $|x| < 1$ , så vi har också  $\sum_{i=0} (-x)^i = \sum_{i=0} (-1)^i x^i = 1/(1+x)$  och  $\sum_{i=0} (-1)^i x^{2i} = 1/(1+x^2)$ , när  $|x| < 1$ .

Termvis integration ger nu

|     |                                                                                        |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------|
| och | $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} = \ln(1+x), \text{ när }  x  < 1$      |
|     | $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} = \arctan(x), \text{ när }  x  < 1,$ |

eftersom likheterna stämmer när  $x = 0$ .

## 5 Taylorpolynom och approximation

Idén är att försöka approximera en funktion  $f(x)$  med ett polynom  $p_n(x)$  i närheten av en punkt  $x = a$ . Vi ska försöka göra detta genom att låta  $p_n(x)$  ha samma derivator upp till ordning  $n$  som  $f(x)$  i  $x = a$ . Detta polynom kallas Taylorpolynomet av grad  $n$  till  $f(x)$  i punkten  $a$ . Samtidigt ska vi försöka hålla reda på vilket fel som uppstår när  $f(x)$  ersätts med  $p_n(x)$ .

Eftersom derivatorna ska stämman upp till ordning  $n$  ser vi genast att

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Problemet som kvarstår är att förstå skillnaden mellan  $f(x)$  och  $p_n(x)$ ; hur väl approximerar polynomet funktionen?

**Sats 5.1** Antag att  $f(x)$  har kontinuerlig derivata av ordning  $n+1$  i en omgivning till  $a$ . När  $x$  ligger i denna omgivning gäller då att

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

för något tal  $\theta$  mellan  $x$  och  $a$ .

**Bevis.** För att slippa en oväsentlig men komplicerande detalj i beviset ska vi bara genomföra det underförutsättning att  $x > a$ . Beviset bygger på upprepade partiell integration. Låt  $x$  vara fixt.

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t) dt = \\ &= [-(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t) dt = \\ &= (x-a)f'(a) + [(-(x-t)^2/2)f''(t)]_a^x + \int_a^x ((x-t)^2/2)f^{(3)}(t) dt = \\ &= (x-a)f'(a) + ((x-a)^2/2)f''(a) + [(-(x-t)^3/3!)f^{(3)}(t)]_a^x + \int_a^x ((x-t)^3/3!)f^{(4)}(t) dt \end{aligned}$$

Upprepning ger nu

$$f(x) = p_n(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Enligt förutsättningen är  $f^{(n+1)}$  kontinuerlig mellan  $a$  och  $x$  och antar därför ett största värde  $M$  och ett minsta värde  $m$  i intervallet mellan  $a$  och  $x$ , så att  $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$ .

Om vi multiplicerar med  $(x-t)^n/n!$ , som är  $\geq 0$  när  $t$  ligger mellan  $a$  och  $x$ , får vi att

$$m \frac{(x-t)^n}{n!} \leq \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq M \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Integration från  $a$  till  $x$  ger nu

$$m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Division med  $I = (x-a)^{n+1}/(n+1)!$ , som är positivt, ger nu

$$m \leq \frac{1}{I} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq M.$$

Enligt satsen om mellanliggande värden finns nu ett  $\theta$  mellan  $a$  och  $x$ , så att mellanledet är  $f^{(n+1)}(\theta)$  och vi får

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = I f^{(n+1)}(\theta) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

■

## 5.1 Uppgifter

1. Lös följande differentialekvationer.

$$(a) ty' + y = t^2 \quad (b) ty' + 3y = t^2 \quad (c) ty' - y = t^2 \quad (d) (t^2 + 4)y' + 4ty = t.$$

2. Bestäm en funktion  $f(x)$  så att  $f'(x) + 2xf(x) = xe^{-x^2}$  och  $f(0) = 1$ .

3. Lös differentialekvationen  $xy' + y/2 = x^2$ , för  $x > 0$ .

4. Lös differentialekvationen  $(1+x^2)y' + xy = (1+x^2)^{1/2}$ .

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen  $dy/dx = (x+y)/2$ , som är sådan att  $y(0) = 1$ .

6. Man vet att  $y(x)$  för  $-1 < x < 1$  löser differentialekvationen

$$(1-x^2)y' - y = (1+x)^2(1-x), \quad y(0) = 1.$$

Vad är  $y(1/2)$ ?

7. Lös differentialekvationen  $x^3y' = 4 \ln x - 2x^2y$ .

8. Lös följande differentialekvationer.

$$(a) yy' = 1 \text{ med } y(0) = 1 \quad (b) yy' = t \text{ med } y(0) = 1 \quad (c) y' = y^2 \text{ med } y(0) = 1.$$

9. Bestäm den lösning till differentialekvationen  $ty' + y^2 = 1$  som uppfyller

$$(a) y(1) = 0 \quad (b) y(1) = 1 \quad (c) y(1) = -1.$$

10. Lös differentialekvationerna

$$(a) ty' = y \quad (b) (2t+1)y' = 3y \quad (c) y' = e^{y-t} \quad (d) y' = (y+t)/2 \quad (e) y' + e^t = e^{t-y}$$

11. Beräkna  $y(2)$  när  $y$  löser differentialekvationen  $(x^2+4)y' = y + 4/y$ , och  $y(0) = 1$ .

12.  $P$  är en godtycklig punkt på en kurva,  $N$  är skärningspunkten mellan  $x$ -axeln och kurvans normal i  $P$ , och  $O$  är origo. Bestäm kurvan om man vet att den går genom punkten  $(1,2)$  och att hela tiden sträckan  $OP$  är lika lång som  $PN$ .

13. Lös följande differentialekvationer

$$(a) y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (b) y'' + 4y' + 4y = 0 \quad (c) 2y'' - 2y' + y = 0 \quad (d) 3y'' - 2y' = 0$$

14. Bestäm den eller de funktioner som uppfyller

(a)  $y'' - 8y' - 9y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

(b)  $y'' - 4y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$ .

(c)  $y'' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi) = 0$ .

15. För vilka värden på talet  $k$  finns det andra lösningar till problemet  $y'' + k^2y = 0$ ,  $y(0) = y(\pi) = 0$  än den där  $y(t) = 0$  för alla  $t$ ? Bestäm i dessa fall även lösningarna.

16. Lös följande differentialekvationer.

(a)  $y'' - 4y' + 4y = 2t + 8$  (b)  $0.5y'' + y = t^2 - 7t + 10$  (c)  $y'' - 7y' + 10y = t^3$  (d)  $y'' + y = e^t$

(e)  $y'' + y = \sin 2t$  (f)  $y'' - 2y' + y = te^t$  (g)  $y'' + y = e^{-t} \sin 2t$

17. Lös följande så kallade begynnelsevärdesproblem

$$y'' - y = e^t, \quad y(0) = 2 \text{ och } y'(0) = \frac{1}{2}.$$

18. En partikels rörelse i planet beskrivs av den parametriserade kurvan  $(x(t), y(t))$ , som man vet löser systemet

$$\begin{cases} x' &= 2x - 3y \\ y' &= x - 2y. \end{cases}$$

När  $t = 0$  är partikeln i punkten  $(4, 2)$ . Vilken hastighet har partikeln när  $t = 1$ ?

19. En partikels bana i planet beskrivs av  $(x(t), y(t))$ , där funktionerna uppfyller sambandet

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + 3y. \end{cases}$$

När  $t = 0$  befinner sig partikeln i punkten  $(1, 0)$ . Bestäm  $x(t)$  och  $y(t)$ .

20. Bestäm funktionerna  $x(t)$  och  $y(t)$ , så att  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$  och

$$\begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= x + 2y. \end{cases}$$

21. En talföljd ges av att  $a_0 = 1/2$  och att  $a_{n+1} = (a_n + a_n^2)/2$ , när  $n \geq 0$ . (Nästa tal i följdens bestäms alltså av sin omedelbara föregångare.)

(a) Visa att 1 är en övre begränsning till följdens och att 0 är en undre begränsning. (Ledning: antag att  $0 < a_n < 1$  och visa att samma sak gäller för  $a_{n+1}$ .)

(b) Visa att följdens är avtagande genom att visa att  $a_n/a_{n+1} \leq 1$ , för alla  $n \geq 0$ .

(c) Argumentera för att följdens är konvergent och bestäm dess gränsvärde (när  $n \rightarrow \infty$ .)

22. Beräkna summan av serien

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i + 4^i}{5^i}.$$

23. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka är absolutkonvergenta?

(a)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln i}{i}$  (b)  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{\ln i}{i}$  (c)  $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-i^2}$  (d)  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i e^{-i^2}$ .

24. Bestäm konvergensradien till

(a)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{3i}}{2^i}$  (b)  $\sum_{i=0}^{\infty} 5^{(-1)^i} x^i$ .

25. För vilka värden på  $x$  konvergerar serien

(a)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i!)^2}{(2i)!} x^i$  (b)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{2^i(i^2 + 1)} x^i$ ?

26. Beräkna summan av serien

$$1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} + \dots$$

För vilka  $x$  konvergerar serien?

27. Bestäm konvergensradien för serien

$$1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{12}}{12!} + \dots$$

och visa att den löser differentialekvationen  $y'' + y' + y = e^x$ . Beräkna seriens summa (med hjälp av elementära funktioner).

28. Visa att serien

$$y = 1 + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^8}{8!} + \dots$$

löser differentialekvationen  $y'' - y = -\cos t$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ . Bestäm seriens summa. För vilka  $t$  är den konvergent?

29. Beräkna

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i i(i-1)}.$$

30. Bestäm Taylorpolynomet av ordning

- (a) tre till  $f(x) = (1 + 2x)^{-1}$  kring punkten  $x = 0$ ,
- (b) nio kring  $x = 0$  till funktionen  $f(x) = (1 - x^3)^{-1}$ ,
- (c) fyra till  $\cos(2x)$  kring  $x = 0$ ,
- (d) fem till  $f(x) = x \cos(x)$  kring punkten  $x = 0$ ,
- (e) fyra till  $f(x) = e^x/x$  kring punkten  $x = 1$
- (f) tre till  $f(x) = \ln(x) \cos(x)$  kring punkten  $x = 2$ .

31. Låt

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\cos(i\pi/3)}{i!} x^i.$$

Bestäm konvergensradien för  $P(x)$  och visa att  $P(x)$  löser differentialekvationen  $y'' - y' + y = 0$ . Uttryck  $P(x)$  med hjälp av elementära funktioner (för  $x$  i konvergensintervallet).

32. Avgör om serien

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)3^i}$$

konvergerar. Bestäm i så fall dess summa.

33. Avgör om serien

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i(2i-1)9^i}$$

konvergerar. Bestäm i så fall dess summa.

34. Visa att

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^{i+1})x^{2i}}{(2i)!}$$

löser differentialekvationen  $y'' - y = 2 \cos(x)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  och beräkna serien

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^{i+1}}{(2i)!}.$$

35. Låt

$$p(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+n} x^{2n}.$$

För vilka värden på  $x$  är  $p(x)$  konvergent. Uttryck  $p(x)$  med hjälp av elementära funktioner i det inre av konvergensintervallet.

36. Avgör om

$$f(x) = \frac{1 + \arctan(x^2)}{e^{x^2}}$$

har ett lokalt extremvärde eller ej i  $x = 0$ .

37. Bestäm konstanten  $a$  så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{x^2} + a \tan x}{x^2 \ln(1+x)}$$

existerar. Bestäm sedan gränsvärdet.

38. Bestäm konstanten  $a$  så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{24 \cos(x^2)e^{x^3} + ax^3 - 24}{x^3 \ln(1+x)}$$

existerar. Bestäm sedan gränsvärdet.

## 6 Svar till uppgifterna

1. (a)  $y = t^2/3 + Ct^{-1}$  (b)  $y = t^2/5 + Ct^{-3}$  (c)  $y = t^2 + Ct$  (d)  $y = 1/4 + C(t^2 + 4)^{-2}$ .
2.  $f(x) = (1 + x^2/2)e^{-x^2}$ .
3.  $y(x) = 2x^2/5 + Cx^{-1/2}$ .
4.  $y(x) = (x + C)(1 + x)^{-1/2}$ .
5.  $y(x) = 3e^{x/2} - x - 2$ .
6.  $3/8 + (\pi/6 + 1)\sqrt{3}$ .
7.  $y(x) = (2(\ln x)^2 + C)x^{-2}$ .
8. (a)  $y = \sqrt{t^2 + 1}$  (b)  $y = \sqrt{t^2 + 1}$  (c)  $y = (1 - t)^{-1}$ .
9. (a)  $y = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$  (b)  $y(t) = 1$  (c)  $y(t) = -1$ .
10. (a)  $y = Ct$  (b)  $y = C(2t + 1)^{3/2}$  (c)  $y = -\ln(C + e^{-t})$   
(d)  $y = Ce^{t/2} - t - 2$  (e)  $\ln|1 - e^y| + e^t + C$  eller  $y(t) = 0$ .
11.  $\sqrt{5e^{\pi/4}} - 4$ .
12.  $y^2 - x^2 = 3$  eller  $x^2 + y^2 = 5$
13. (a)  $y = Ae^t + Be^{2t}$  (b)  $y = (A + Bt)e^{-2t}$   
(c)  $y = e^{t/2}(A \sin(t/2) + B \cos(t/2))$  (d)  $y = Ae^{2t/3} + B$ .
14. (a)  $y = (e^{9t} - e^{-t})/10$  (b)  $y(t) = 0$  (c)  $y = A \sin 2t$ .
15.  $k$  godtyckligt heltal  $\neq 0$ . Lösningarna är  $y = A \sin kt$  där  $A$  är en godtycklig konstant.
16. (a)  $y = (t + 5)/2 + (A + Bt)e^{2t}$  (b)  $y = t^2 - 7t + 9 + A \sin t\sqrt{2} + B \cos t\sqrt{2}$   
(c)  $y = 0.1t^3 + 0.21t^2 + 0.234t + 0.1218 + Ae^{5t} + Be^{2t}$  (d)  $y = 0.5e^t + A \sin t + B \cos t$   
(e)  $y = -\sin(2t)/3 + A \sin t + B \cos t$  (f)  $y = (A + Bt + t^3/6)e^t$   
(g)  $y = e^{-t}(0.2 \cos 2t - 0.1 \sin 2t) + A \sin t + B \cos t$ .
17.  $y = (1 + 0.5t)e^t + e^{-t}$ .
18.  $(3e - e^{-1}, e - e^{-1})$ .
19.  $x(t) = 1 - t$  och  $y(t) = te^{2t}$ .
20.  $x(t) = -e^{2t} \sin t$  och  $y(t) = e^{2t} \cos t$ .
21. (c) 0.
22.  $15/2$ .

23. (a) Divergerar (b) Konvergerar (c) Konvergerar (d) Absolutkonvergent.
24. (a)  $2^{1/3}$  (b)  $5^{-1/2}$ .
25. (a)  $-4 < x < 4$  (b)  $-2 < x \leq 2$ .
26.  $1 - \ln(1 - x^3)/3$ ,  $-1 \leq x < 1$ .
27. Summan är  $e^x/3 + 2e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}x/2)/3$ , för alla  $x$ .
28.  $y(t) = (\cosh t + \cos t)/2$  för alla  $t$ .
29.  $(1 - \ln 2)/2$ .
30. (a)  $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3$  (b)  $1 + x^3 + x^6 + x^9$  (c)  $1 - 2x^2 + 2x^4/3$   
 (d)  $x - x^3/2 + x^5/24$  (e)  $e + e(x - 1)^2/2 - e(x - 1)^3/3 + 3e(x - 1)^4/8$   
 (f)  $(\ln 2)^2 + \ln 2(x - 2) + (1 - \ln 2)(x - 2)^2/4 + (2 \ln 2 - 3)(x - 2)^3/24$ .
31. Konvergensradien är  $\infty$  och  $P(x) = e^{x/2} \cos \sqrt{3}x/2$ .
32.  $\sqrt{3}\pi/6$ .
33.  $3^{-1} \arctan(3^{-1}) + 2^{-1} \ln(0.9)$ .
34.  $2 \cosh 1 - \cos 1$ .
- 35.
- $$p(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{2x^2} - 1 + 2x^2 & \text{när } 0 < |x| < 1/\sqrt{2} \\ 0 & \text{när } x = 0. \end{cases}$$
36. Lokalt maximum.
37.  $a = -1$  och gränsvärdet blir  $3/2$ .
38.  $a = -24$  och gränsvärdet blir  $12$ .