

Repetitionsuppgifter

Integraler och tillämpningar av integraler

1. (a) Beräkna

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{(1+x)^2} dx.$$

- (b) Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

är konvergent eller divergent. Beräkna den om den är konvergent.

2. (a) Beräkna

$$\int \frac{18x+15}{9x^2+12x-12} dx$$

- (b) Avgör om

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

konvergerar. Beräkna i så fall dess värde.

3. Beräkna

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx.$$

4. Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^3} dt$$

är konvergent eller divergent. Bestäm dess värde om den är konvergent.

5. Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt$$

är konvergent eller divergent. Bestäm dess värde om den är konvergent.

6. Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2+2x+x^2}$$

är konvergent eller divergent. Bestäm dess värde om den är konvergent.

7. (a) Beräkna

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t^2)}{t^3} dt.$$

- (b) Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t^2} dt$$

är konvergent eller divergent. Beräkna den om den är konvergent.

8. Beräkna

(a)

$$\int_3^8 \frac{\sqrt{t+1}}{t + \sqrt{t+1} + 1} dt$$

(b)

$$\int 2x \ln(x+1) dx.$$

9. Beräkna

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

om den konvergerar. Visa annars att den divergerar.

10. När kurvan $y = \sqrt{1+x^2}$, $0 \leq x \leq 1$ roterar kring y -axeln uppstår en kropp. Beräkna volymen av denna.

11. När kurvan $y = 1+x^2$, $0 \leq x \leq 2$ roterar kring x -axeln avgränsas en kropp i rummet. Beräkna volymen av denna kropp.

12. En skålformad behållare beskrivs av att man låter kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 4$ (4 meter) rotera runt y -axeln. Den är fylld till höjden 10 m av en oljeblandning som skiktat sig så att densiteten på höjden h är $800 - 10h$ kg/m³.

Vilket arbete krävs för att pumpa upp alla olja till behållarens kant?

13. Kurvan $x = f(y)$, där $f(y) > 0$ och $y > 0$ roterar runt y -axeln. Man får en behållare med hål i botten. Enligt Torricellis ekvation är hastigheten med vilken volymen på en vätska i behållaren avtar proportionell mot kvadratroten av summan vätskans höjd i behållaren och en konstant.

Om behållaren är så beskaffad att vätskans höjd avtar i konstant takt, hur ser då behållaren ut (bestäm $f(y)$).

14. Cirkeln $(x-1)^2 + y^2 = 1$ i x, y -planet är bas i en homogen kon med spets i $(0, 0, 4)$. Bestäm z -koordinaten för konens masscentrum.

Differentialekvationer

15. Lös ekvationen $y'' - 2y' + y = e^{3t} + e^t$.

16. Lös följande differentialekvationer när $x > 0$.

(a)

$$\sqrt{x}y' = y(y-1),$$

(b)

$$xy' + (1-x)y = x^2.$$

17. Lös differentialekvationen

$$x^2y(x)y'(x) = (1+y(x)^2)\cos(1/x), \quad x > 0, \quad y(2/\pi) = 0.$$

18. Lös differentialekvation

$$y'' - y = x^2, \quad y'(0) = y(0) = 1.$$

19. Bestäm alla reella lösningar till differentialekvationen

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \cos 3t.$$

20. En partikel, som vid tiden $t = 0$ befinner sig i $(1, 0)$, rör sig i planet enligt en parametriserad kurva $(x(t), y(t))$, som löser systemet

$$\begin{cases} x' &= 4x - y \\ y' &= 4y + x. \end{cases}$$

Hur långt färdas partikeln mellan tiden $t = 0$ och $t = 1$?

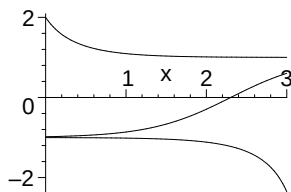
21. Bestäm alla funktioner $f(x)$ som har egenskapen att alla normaler till grafen går genom $(0, 1)$.

22. Grafen till den deriverbara funktionen $f(x)$ har följande egenskap:

Om man i en godtycklig punkt $(a, f(a))$ på grafen drar normalen så rår den x -axeln i $(b, 0)$. Triangeln med hörn i punkterna $(a, f(a))$, $(b, 0)$ och $(a, 0)$ har alltid arean 2.

Vilken funktion är $f(x)$, om man dessutom vet att $f(3) = 2$?

23. Figuren nedan visar graferna till tre funktioner som är lösningar till en och samma differentialekvation. Ange en sådan och lös den fullständigt.



Det finns många svar och Du behöver bara ta hänsyn till det principiella uppförandet hos lösningarna.

Serier, potensserier och Taylorpolynom

24. Låt

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\cos(i\pi/3)}{i!} x^i.$$

(a) Bestäm konvergensraden för $P(x)$.

(b) Visa att $P(x)$ löser differentialekvationen

$$y'' - y' + y = 0.$$

(c) Uttryck $P(x)$ med hjälp av elementära funktioner (för x i konvergensintervallet).

25. För vilka x konvergerar

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{i \cdot 2^i}?$$

26. (a) Bestäm konvergensraden till potensserien

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i!)^3 x^{2i+1}}{(3i)! 3^{i+1}}.$$

(b) Avgör om serien

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)3^i}$$

konvergerar. Bestäm i så fall dess värde.

27. För vilka x konvergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{\sqrt{k}}?$$

28. För vilka x konvergerar serien

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{3i+1}}{i^2 2^{2i}}?$$

29. (a) Bestäm konvergensradien till potensserien

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i!)^2 x^{4i+1}}{2^i (2i+1)!}.$$

- (b) Avgör om serien

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i(2i-1)9^i}$$

konvergerar. Bestäm i så fall dess värde.

30. Bestäm Taylorpolynomet av ordning 6 kring $x = 0$ till funktionen

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

31. Bestäm Taylorpolynomet av ordning 6 kring $x = 0$ till funktionen

$$\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

32. Bestäm Taylorpolynomet av ordning 4 till $\cos(2x)$ kring $x = 0$.

33. Bestäm Taylorpolynomet av ordning 9 kring $x = 0$ till funktionen $1/(1-x^3)$.

34. Beräkna gränsvärdet av

$$\frac{\arctan(x^2) - x^2}{\cos(x^3) - 1},$$

när $x \rightarrow 0$.

35. Beräkna gränsvärdet av

$$\frac{\ln(1+t^3)}{e^{t^2} \sin(t) - t},$$

när $t \rightarrow 0$.

36. Lös differentialekvationen

$$xy'' + 2y' - xy = 1, \quad y(0) = 1.$$

Uttryck lösningen med elementära funktioner.

37. Lös differentialekvationen

$$4xy'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1.$$

Uttryck lösningen med elementära funktioner.

38. Avgör om

$$\frac{x^3 - \sin(x^3)}{1 + x \cos x}$$

har ett lokalt maximum eller minimum i $x = 0$.

39. Avgör om

$$\frac{e^{x^2} \cos(\sqrt{2}x) - 1}{1 + \sin(3x)}$$

har ett lokalt maximum eller minimum i $x = 0$.

Förslag till svar

- (a) $\ln(2)/4$
(b) Konvergent med värdet π
- (a) $\frac{9}{8} \ln|3x-2| + \frac{7}{8} \ln|x+2|$
(b) Konvergent med värdet π .

3. $\arcsin(\sin(x)/\sqrt{2}) + C$.
4. Konvergent med värdet $1/4$.
5. Konvergent med värdet $4/3$.
6. Konvergent med värdet $\pi/4$
7. (a) $-5 \ln(5)/8 + 2 \ln(2)$
(b) Divergent
8. (a) $2 - 2 \ln(4/3)$
(b) $(x^2 - 1) \ln(x + 1) - x^2/2 + x + C$
9. Konvergent med värdet 1
10. $\pi(2 - \sqrt{2})/3$
11. $206\pi/15$
12. $3.45 \cdot 10^5 \pi g$ joule
13. $f(y) = a(y + c)^{1/4}$, där $a, c > 0$ är konstanter.
14. 1
15. $y = (At + B + t^2/2)e^t + e^{3t}/4$, där A och B är godtyckliga konstanter
16. (a) $y = 0$, $y = (1 + ce^{2\sqrt{x}})^{-1}$, där c är en godtycklig konstant
(b) $y = -(x + 2 + 2/x) + ce^x x^{-1}$, där c är en godtycklig konstant
17. $y = (e^{2(1 - \sin(1/x))} - 1)^{1/2}$
18. $y = 2e^x + e^{-x} - 2 - x^2$
19. $y = e^{-t}(A \cos(2t) + B \sin(2t) - \cos(3t)/5)$, där A och B är godtyckliga konstanter
20. $\sqrt{17}(e^4 - 1)/4$
21. $f(x) = 1 \pm \sqrt{c - x^2}$, där $c > 0$ är en konstant
22. $f(x) = (12x - 28)^{1/3}$ eller $f(x) = (44 - 12x)^{1/3}$
23. T.ex. $y' = 1 - y^2$ samt $y = 1$, $y = 1 - 2(ce^{2x} + 1)^{-1}$, där c är en godtycklig konstant
24. (a) ∞
(c) $P(x) = e^{x/2} \cos(\sqrt{3}x/2)$
25. $-\sqrt{2} \leq x < \sqrt{2}$
26. (a) 9
(b) Konvergent med summan $\sqrt{3}\pi/6$
27. $-1 < x \leq 1$
28. $-4^{1/3} \leq x \leq 4^{1/3}$
29. (a) $8^{1/4}$
(b) Konvergent med summan $\arctan(1/3)/3 - \ln(\sqrt{10}/3)$
30. $1 - x^2 + x^4 - x^6$
31. $2x - 4x^3 + 6x^5$
32. $1 - 2x^2 + 2x^4/3$
33. $1 + x^3 + x^6 + x^9$
34. $2/3$
35. $6/5$

36. $y = (e^x - 1)x^{-1}$

37. $y = \cos(\sqrt{x})$

38. Varken lokalt minimum eller maximum

39. Lokalt maximum