

Tips till repetitionsuppgifter

Integraler och tillämpningar av integraler

1. (a) Först PI där $1/(1+x)^2$ integreras och $\arctan x$ deriveras. Sedan PBU av återstående integral.

$$\int \frac{x-1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

- (b) Kvadratkomplettera under rottecknet till $1/4 - (x-1/2)^2$. Bryt sedan ut $1/4$ så att det blir $\sqrt{1-(2x-1)^2}$. Integrera med $\arcsin t$.

2. (a) Faktorisera nämnaren: $(x+2)(9x-6)$. PBU och integrera med $\ln|t|$.

- (b) Sätt $t = \sqrt{x-1}$ ($x = t^2 + 1$). Integrera med $\arctan t$.

3. Använd $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ och sätt $t = \sin x$. Bryt ut 2 ur rottecknet och integrera med $\arcsin u$

4. PI genom integrering av t^{-3} och derivering av $\ln t$.

5. Sätt $x = \sqrt{1-t}$ ($t = 1 - x^2$). Integrera polynomet.

6. KK i nämnaren till $1 + (x+1)^2$ och integrering med $\arctan t$.

7. (a) PI genom integrering av t^{-3} och derivering av $\ln(1+t^2)$. PBU i återstående integralen och integrera med $\ln|u|$.

- (b) Funktionen som ska integreras har asymptot i $t = 1$. Sätt $s = 1 - t$. Den nya funktionen är $\geq 1/(2s)$ som ger en divergent integral.

8. (a) Sätt $s = \sqrt{t+1}$ ($t = s^2 - 1$)

- (b) PI genom integrering av $2x$ och derivering av $\ln(x+1)$. Polynomdivision i återstående integralen.

9. Sätt (eventuellt) $s = x^2$ och integrera med $(1-s)^{1/2}$.

10. Skikta kroppen i y -led. Ger cirkelskivor med radii $\sqrt{y^2-1}$, $1 \leq y \leq \sqrt{2}$. Använd skivformeln.

11. Använd skivformeln i x -led.

12. Skikta i y -led. Volymen av ett skikt är $\pi y \Delta y$, massan $\pi y(800-10y)\Delta y$, kraften $g\pi y(800-10y)\Delta y$, och arbetet $g\pi y(800-10y)(16-y)\Delta y$.

13. Volymen som funktion av h är $V(h) = \pi \int_0^h f(t)^2 dt$, så $V'(h) = \pi f(h)^2$, som ger $dV/dt = V'(h)h'(t)$, där $h'(t)$ är konstant enligt uppgiften som också ger $dV/dt = k\sqrt{h(t)} + c$. Bestäm nu $f(h)$.

14. Moment i z -led ges av $\rho \int_0^4 zA(z) dz$, där $z = \pi(1-z/4)^2$ (ρ densiteten).

Differentialekvationer

15. Bestäm partikulärlösning när HL är dels e^t dels e^{3t} genom att först sätta $y = ze^t$ resp $y = ze^{3t}$. Summan av dessa är sedan en partikulärlösning till ekvationen.

16. (a) Separera genom division med $y(y-1)$ och $\sqrt{x}$. Observera lösningarna $y = 0$ och $y = 1$!

- (b) Dela med x ($\neq 0$). IF är $|x|e^{-x}$. Integralen klaras med PI (dela upp i två fall: $x > 0$ och $x < 0$).

17. Separera genom division med $1+y^2$ och x^2 .

- 18.

19. Sätt först $y = ze^{-t}$ och ansätt $z_p = A \cos(3t) + B \sin(3t)$.

20. Första ekvationen ger $y = 4x - x'$ (och $x'(0) = 4$). I andra ger detta en ekvation med lösningen $x = e^{4t} \cos t$. Sedan är $y = e^{4t} \sin t$. Farten är $\sqrt{(x')^2 + (y')^2}$, där $(x')^2 + (y')^2 = 17e^{8t}$. Integrera farten mellan $t = 0$ och $t = 1$.
21. Normalen i $(a, f(a))$ har ekvationen $y = -(1/f'(a))(x - a) + f(a)$. Att den går genom $(0, 1)$ ger differentialekvationen $f'(x) = a + f(a)f'(a)$ som är separabel.
22. Normalen i $(a, f(a))$ har ekvationen $y = -(1/f'(a))(x - a) + f(a)$ och skär x -axeln i $a - f'(a)f(a)$. Uppgiften ger $|f \cdot f'|/|f| = 4$, dvs $f^2 f' = \pm 4$. Integrera.
23. Låt riktningsfältet bestämmas enbart av y -koordinaten. Positiv lutning när $-1 < y < 1$ och negativ för övrigt stämmer med $y' = 1 - y^2$ (t.ex.).

Serier, potensserier och Taylorpolynom

24. (a) Kvoten av absolutbeloppet av två på varandra följande termer är

$$\left| \frac{\cos((n+1)\pi/3)}{\cos(n\pi/3)} \cdot \frac{x}{n+1} \right| \rightarrow 0, \text{ när } n \rightarrow \infty.$$

Additionsformeln:

$$\cos((n+1)\pi/3) = \cos(n\pi/3) \cos(\pi/3) - \sin(n\pi/3) \sin(\pi/3).$$

- (b) Koefficienten framför x^n i VL är (använd additionsformeln)

$$\frac{1}{n!} (\cos((n+2)\pi/3) - \cos((n+1)\pi/3) + \cos(n\pi/3)) = 0.$$

- (c) Observera att $P(0) = 1$, $P'(0) = \cos(\pi/3)$ och lös differentialekvationen.

25.

26. (a)

- (b) Sätt $P(x) = \sum ((-1)^k / (2k+1)) x^{2k+1}$. Sökt summa är $\sqrt{3}P(1/\sqrt{3})$ (och $P(0) = 0$) och $P'(x) = 1/(1+x^2)$.

27.

28.

29. (a)

- (b) Sätt $P(x) = \sum ((-1)^i / ((2i)(2i-1))) x^{2i}$. Då är $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ och $P''(x) = -1/(1+x^2)$. Bestäm $P(x)$ och beräkna $P(3)$.

30. $1/(1+x^2) = \sum (-1)^k x^{2k}$. Hugg av potensserien.

31. $1/(1+x^2) = \sum (-1)^k x^{2k}$. Derivera och hugg av potensserien.

32. Utveckla $\cos t$ i potensserie och hugg av.

33. Utveckla $1/(1-x^3)$ i potensserie och hugg av.

34. Utveckla $\arctan t$ och $\cos t$ i potensserier.

35. Utveckla $\ln(1+x)$, e^x och $\sin x$ i potensserier.

36. Ansätt $P(x) = \sum a_k x^k$. Från ekvationen har man $P(0) = 1$, $P'(0) = 1/2$. Man ska få $a_k = 1/(k+1)!$.

37. Ansätt $P(x) = \sum a_k x^k$. Från ekvationen har man $P(0) = 1$, $P'(0) = -1/2$. Man ska få $a_k = (-1)^k / (2k)!$.

38. Utveckla $\sin t$ i potensserie och dela med lämplig potens av t (så att man får ett gränsvärde $\neq 0$ när $x \rightarrow 0$).

39. Potensserieutveckla täljaren och dela med lämplig potens av x (så att man får ett gränsvärde $\neq 0$ när $x \rightarrow 0$).