

Tentamensskrivning i Algebra del 2

Varje uppgift ger högst 3 poäng utom nr 4 som kan ge 4 poäng. Skrivningen beräknas vara färdiggrättad måndagen den 29 januari . Lycka till!

1. (a) Definiera vad som menas med att en matris är inverterbar.
(b) Beskriv en metod för hur man kan bestämma inversen till en matris eller upptäcka att den inte är inverterbar.
(c) Bevisa att om A och B är inverterbara matriser av samma typ, så är också AB inverterbar.
2. Visa att en $n \times n$ matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer.
3. Nedan är A en matris.
 - (a) Definiera begreppen nollrum och rang för A .
 - (b) Antag att A är av typ 5×8 , vilken är den största möjliga rang matrisen kan ha? (Motivera!)
 - (c) Antag att A är av typ $m \times n$ och att rangen är 7 och nollrummets dimension är 8. Vad kan man säga om talen m och n ? (Motivera!)
4. (a) Hur *definieras* att en delmängd av $\mathbb{R}^n$ är ett underrum av $\mathbb{R}^n$?
(b) Hur *kontrollerar* man på ett enkelt sätt om en delmängd av $\mathbb{R}^n$ är ett underrum av $\mathbb{R}^n$?
(c) Finns det ett underrum av $\mathbb{R}^3$ som innehåller vektorn $(2, 4, 6)$ men inte vektorn $(1, 2, 3)$? Motivera svaret!
(d) Hur ser man att $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ inte är ett underrum av $\mathbb{R}^3$?
5. Betrakta för varje reellt tal a matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}$$

Bestäm för varje värde på a de vektorer $\mathbf{b}$ för vilka ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart.

6. Betrakta den avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som uppkommer genom att varje punkt P avbildas på skärningspunkten mellan planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ och den linje som går genom P och har riktningsvektorn $(2, 1, 1)$.
 - (a) Bestäm standardmatrisen för avbildningen.
 - (b) Ange ett egenvärde och en egenvektor till matrisen i (a) utan räknande.

7. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

och betrakta följderna av kolonnvektorer $\mathbf{v}_n$ definierade genom att

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

där vi betraktar $\mathbf{v}_0$ givet från början. Bestäm det minsta positiva tal c sådant att följderna $c^{-n}\mathbf{v}_n$ för varje val av $\mathbf{v}_0$ har ett gränsvärde då $n \rightarrow \infty$.

8. Antag att A är en $n \times n$ -matris och att det finns en vektor $\mathbf{x}$ sådan att $A^5\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ medan $A^6\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Visa att vektorerna $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, A^3\mathbf{x}, A^4\mathbf{x}, A^5\mathbf{x}$ är linjärt oberoende.