

Tentamensskrivning i Algebra del 2

Varje uppgift ger högst 3 poäng utom nr 4 som kan ge 4 poäng. Skrivningen beräknas vara färdigrättad tisdagen den 9 april. Lycka till!

1. (a) Hitta på två matriser A och B sådana att $AB \neq BA$
(b) Hitta på två matriser $A \neq 0$ och $B \neq 0$ sådana att $AB = 0$.
(c) Hitta på en matris $A \neq 0$ sådan att $A^2 = 0$.
2. (a) Definiera vad som menas med att ett vektorrum är ändligtdimensionellt respektive oändligtdimensionellt.
(b) Antag att H är ett underrum till ett ändligtdimensionellt vektorrum V . Visa att varje linjärt oberoende mängd i H kan utvidgas till en bas för H och att

$$\dim H \leq \dim V$$

3. Antag att A är en $m \times n$ -matris.
(a) Definiera begreppen kolonnrum, radrum, nollrum och rang för A .
(b) Bevisa rangsatsen, dvs att

$$\text{rank } A + \dim \text{Nul } A = n$$

4. (a) Definiera vad som menas med en *elementär* matris och ge exempel på en elementär 2×2 -matris som inte är enhetsmatrisen.
(b) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

och bestäm en elementär matris E så att

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- (c) Låt A vara som i (b). Bestäm elementära matriser E_1, E_2, E_3 så att $E_3 E_2 E_1 A$ är av trappstegsform.
5. (a) Betrakta vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (4, 5, -1)$ och $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 1)$. Bestäm en bas för $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.
(b) Ligger vektorn $(1, 11, -10)$ i $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$?
6. Om matrisen A vet man att den har egenvektorer $(1, 1)$ och $(1, -2)$ med egenvärdena 2 respektive 1. Bestäm matrisen A .

7. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{bmatrix}$$

där a är en reell parameter. För vilka värden på a är A diagonaliserbar (på reell form)? Motivera ordentligt i de olika fall som kan uppkomma!

8. Låt $\mathbb{C}$ vara mängden av komplexa tal. Betrakta funktionen $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definierad genom $F(z) = z + i\bar{z}$, där som vanligt $\bar{z}$ är konjugatet av z .

$\mathbb{C}$ kan uppfattas som ett reellt vektorrum när vi använder operationerna: vanlig addition av komplexa tal och multiplikation med skalär, cz , där c är en *reell* skalär. Sett på detta sätt är $\mathbb{C}$ ett tvådimensionellt rum med den naturliga basen $\{1, i\}$. Visa att då är F en linjär avbildning och bestäm dess matris i basen $\{1, i\}$.