

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 4:e april.

1. Antag att a är en parameter och betrakta vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}.$$

(a) För vilka värden på a är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ linjärt beroende? (3p)

(b) För vilka värden på a är $\mathbf{b}$ en linjärkombination av de övriga tre vektorerna? (3p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Undersök för vilka a som matrisen A är diagonaliserbar. Bestäm för eventuella sådana a gränsvärdet av A^n då $n \rightarrow \infty$. (6p)

3. Låt $\mathbb{P}_2$ vara det linjära rummet av alla polynom av grad högst 2. Definiera sedan en avbildning $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ genom att

$$T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}'(1) \\ \mathbf{p}''(1) \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att T är en linjär avbildning. (3p)

(b) Bestäm avbildningens matris då vi använder $\{1, t, t^2\}$ som bas för $\mathbb{P}_2$ och standardbasen i $\mathbb{R}^3$. (3p)

4. Låt W vara den delmängd av $\mathbb{R}^4$ som består av alla vektorer $\mathbf{x}$ som uppfyller

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Hur ser man att W är ett underrum till $\mathbb{R}^4$? (2p)

(b) Bestäm den vektor $\mathbf{x}$ i W som har minsta avstånd till vektorn

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna också detta minimala avstånd. (6p)

VÄND!

5. (a) Definiera vad som menas med att en mängd av vektorer i ett vektorrum är linjärt oberoende. (1p)
- (b) Ett resultat i boken säger att om man har en mängd bestående av egenvektorer till en matris, vilka svarar mot olika egenvärden, så är mängden linjärt oberoende. Genomför beviset i specialfallet då antalet vektorer är tre. (4p)
- (c) Definiera vad som menas med en bas för ett underrum av ett vektorrum. (1p)

Uppgifter för möjlighet till höjning av tilläggspoängen.

För den som inte har maximal tilläggspoäng från duggan och de två inlämningsuppgifterna, kommer här tre kompletteringsuppgifter. Vilka uppgifter du kan använda för att höja poängen beror på vilken tilläggspoäng du har från början. Principerna är desamma som i samband med Envariabelanalys del B i höstas. Här anges därför i samband med varje uppgift bara vilka som kan ha anledning att räkna denna. Fullständiga lösningar skall ges även i dessa uppgifter.

K1 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 6)

Bestäm alla punkter i rummet som ligger i alla tre planen $x + y + 2z = 1$, $2x + y - z = 2$ och $3x + 2y + z = 3$.

K2 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 12)

A är en 2×2 -matris med egenvärdena 1 och -1. Två tillhörande egenvektorer är

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den lösning $\mathbf{x}(t)$ till $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ som uppfyller

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

K3 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 18)

Bestäm alla 2×2 -matriser X sådana att $X^2 = -I$. Kan du inte karakterisera alla så bestäm åtminstone någon eller några.

/J-E A