

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida på måndagen efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 6:e september.

1. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera varje svar.

- (a) Planet $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$ är ett tvådimensionellt underrum till $\mathbb{R}^3$.
- (b) Ett ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta kan ha mer än en lösning.
- (c) Om det finns en linjärt oberoende mängd, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$, av vektorer i ett ändligtdimensionellt vektorrum V så gäller $\dim V \geq p$.
- (d) Om A är en 4×4 -matris sådan att $\det A = 3$ så gäller $\det A^2 = 12$.
- (e) Om A är inverterbar så är den också diagonaliserbar.

Det blir en poäng per deluppgift plus en extra om alla fem är rätt.

2. Bestäm ekvationen för den linje som i minstakvadratmetodens mening bäst ansluter till punkterna $(1,1)$, $(2,2)$ och $(3,4)$. (6p)

3. En matris A kallas självinvers om $A^{-1} = A$. Vidare kallas en matris B idempotent om $B^2 = B$. Bevisa följande påståenden.

- (a) Om A är självinvers så är $B = \frac{1}{2}(I - A)$ idempotent. (2p)
- (b) Om B är idempotent så är $A = I - 2B$ självinvers. (2p)
- (c) Bestäm en 2×2 -matris A som är självinvers och vars element på plats $(1,1)$ är 2. (3p)

4. En speciell vargflock jag varje dag i ett av fyra områden, O_1, O_2, O_3, O_4 . Jaktvanorna är följande:

- (1) Om den jagar i ett område en dag gör den det inte dagen därpå.
- (2) Om den jagar i O_1 en dag så jagar den varken i O_2 eller O_3 dagen därpå.
- (3) Om den jagar i O_2 eller O_3 så är det lika stor sannolikhet att den jagar i vart och ett av de tre övriga områdena den följande dagen.
- (4) Om den jagar i O_4 en dag så är det lika stor sannolikhet för att den följande dag jagar i O_2 som i O_3 , men dubbelt så stor sannolikhet att den jagar i O_1 .

Man kan visa att under dessa förutsättningar finns ett jämviktsläge som inträder långsiktigt. Bestäm för varje område den långsiktiga sannolikheten för att flocken en given dag jagar just där. (6p)

5. (a) Definiera vad som menas med ett egenvärde och en egenvektor till en matris. (2p)
- (b) Antag att man har en mängd av vektorer som svarar mot olika egenvärden till en matris. Bevisa att mängden är linjärt oberoende. (5p)

VÄND!

Uppgifter för möjlighet till höjning av tilläggspoängen.

För den som inte har maximal tilläggspoäng från duggan och de två inlämningsuppgifterna, kommer här tre kompletteringsuppgifter. Om du i samband med tentan i mars lyckades höja din tilläggspoäng så är det denna höjda poäng som är ny utgångspunkt. Vilka uppgifter du kan använda för att höja poängen beror på vilken tilläggspoäng du har. Här anges därför i samband med varje uppgift bara vilka som kan ha anledning att räkna denna. Fullständiga lösningar skall ges även i dessa uppgifter.

K1 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 6)

Är vektorn $(2, 1, -1)$ en linjärkombination av vektorerna $(1, -1, 0)$, $(3, 0, 1)$ och $(4, -1, 1)$? Motivering krävs förstås! (6p)

K2 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 12)

Vektorerna $[1 \ 1 \ 1]^T$, $[2 \ 1 \ 1]^T$ och $[1 \ 1 \ 2]$ är egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$. (6p)

K3 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 18)

Bestäm matrisen för den linjära avbildning som avbildar varje punkt i rummet på dess spegelbild i planet (6p)

$$x - 2y + 2z = 0.$$

/J-E A