

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 29:e januari.

1. (a) Bestäm baser för nollrummet och kolonnrummet till matrisen (5p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- (b) För vilka parametervärden p är systemet $Ax = b$ lösbart om $b = [1 \ 2 \ p]^T$? (2p)

2. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera varje svar.

- (a) Om ekvationssystemet $Ax = b$ har exakt en lösning för något b , så har också systemet $Ax = 0$ exakt en lösning.
(b) Om A och B är matriser sådana att $AB = BA$ och A är inverterbar så gäller $A^{-1}B = BA^{-1}$.
(c) Om A är en 3×3 -matris sådan att $\det(-A) = -\det A$ så gäller $\det A = 0$.
(d) Om A är en kvadratisk matris vars första kolonn består av enbart nollor så är noll ett egenvärde till A .
(e) Antag att u är en given vektor i $\mathbb{R}^7$. Då är

$$\{v \in \mathbb{R}^7 : v \cdot u = 1\}$$

ett underrum till $\mathbb{R}^7$.

Det blir en poäng per deluppgift plus en extra om alla fem är rätt. (6p)

3. Antag att man vill anpassa ett andragradspolynom $y = ax^2 + bx + c$ till de fyra punkterna $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$. Bestäm de värden på a, b och c som leder till bästa approximation i minsta kvadratmetodens mening. (Metoden leder till att a, b och c skall bestämmas ur ett kvadratisk ekvationssystem. Du får 4 poäng om du fram detta system och sedan ytterligare 3 poäng om du löser det.) (7p)

4. Visa att matrisen

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

är matris för en avbildning som geometriskt svarar mot spegling i ett plan genom origo. Vilket är planet? (6p)

5. I kursen har vi visat följande resultat om ortogonal uppdelning av vektorer. Om W är ett under-
rum av $\mathbb{R}^n$, så kan varje vektor y i $\mathbb{R}^n$ entydigt skrivas på formen

$$y = \hat{y} + z$$

där $\hat{y}$ ligger i W och z ligger i det ortogonala komplementet till W . Genomför detta bevis. Som i boken får du utgå från att W har en ortogonal bas. (6p)

Uppgifter för möjlighet till höjning av tilläggspoängen.

För den som inte har maximal tilläggspoäng från duggan och de två inlämningsuppgifterna, kommer här tre kompletteringsuppgifter. Om du i samband med tentorna i mars eller augusti lyckades höja din tilläggspoäng så är det denna höjda poäng som är ny utgångspunkt. Vilka uppgifter du kan använda för att höja poängen beror på vilken tilläggspoäng du har. Här anges därför i samband med varje uppgift bara vilka som kan ha anledning att räkna denna. Fullständiga lösningar skall ges även i dessa uppgifter.

K1 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 6)

Avgör för var och en av följande matriser om den är inverterbar. Bestäm också inversen om den existerar. (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

K2 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 12)

En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avbildar parallelogrammen med hörnpunkterna $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$ och $(1, 3)$ på en parallelogram med hörnpunkterna $(0, 0)$, $(-5, 6)$, $(-13, 13)$ respektive $(-8, 7)$. Bestäm avbildningens standardmatris. (6p)

K3 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 18)

Betrakta systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Detta problem kan lösas genom matrisdiagonalisering. Genomför detta. (6p)

/J-E A