

Lösningar till Linjär algebra och flervariabelanalys I, del A 16/3-2002

1. Bilda matrisen $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$. De tre vektorerna är linjärt beroende precis då denna innehåller högst två pivotkolonner. Vektorn $\mathbf{b}$ är en linjärkombination av de tre vektorerna precis då systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart.

Vi undersöker dessa båda egenskaper samtidigt genom att studera den utvidgade matrisen.

$$[A \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Här har vi alltså bytt plats på rad 1 och rad 3. Subtraherar vi nu nya rad 1 från nya rad 2 och a ggr nya rad 1 från nya rad 3 får vi den ekvivalenta matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1+a-a^2-a^3 \end{bmatrix}$$

- (a) Här ser vi att de tre första kolonnerna är pivotkolonner precis då $a-1 \neq 0$ och $2-a-a^2 \neq 0$. Den sista likheten inträffar för $a = 1$ och för $a = -2$. Eftersom den första inträffar precis då $a = 1$ är alltså de tre vektorerna linjär beroende om och endast om $a = 1$ eller $a = -2$.
- (b) Om vi har pivotelement i varje rad i den reducerade matrisen är systemet förstås lösbart så det intressanta blir vad som händer i de båda fallen från (a). När $a = 1$ består de två sista raderna i den reducerade matrisen av nollor och systemet är lösbart. Om däremot $a = -2$ har vi ett pivotelement i sista kolonnen och då är systemet inte lösbart. Slutsatsen är alltså att $\mathbf{b}$ är en linjärkombination av de övriga om och endast om $a \neq -2$.
2. Eftersom A är triangulär står egenvärdena i huvuddiagonalen. Matrisen A är diagonaliserbar om och endast om den har tre linjärt oberoende egenvektorer. Eftersom 1 förekommer två gånger i huvuddiagonalen kommer $\lambda = 1$ att vara en dubbelrot till den karakteristiska ekvationen. Det avgörande blir då om vi kan få fram två linjärt oberoende egenvektorer till egenvärdet 1. Egenvektorer som svarar mot egenvärdet 1 får vi ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ -0.5x_3 = 0 \end{cases}$$

Om $a \neq 0$ ger detta att $x_3 = x_2 = 0$ varför vi får ett endimensionellt egenrum. I detta fall är alltså matrisen inte diagonaliserbar. Om $a = 0$ är enda villkoret $x_3 = 0$ vilket alltså ger ett tvådimensionellt egenrum och matrisen är diagonaliserbar. Två linjärt oberoende egenvektorer är e_1 och e_2 (dvs de två första basvektorerna i standardbasen). Vi tar också för $a = 0$ fram en egenvektor för $a = 0.5$. Denna kan alltså väljas som en av lösningarna till

$$\begin{cases} 0.5x_1 + 2x_3 = 0 \\ 0.5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

En lösning är $[-4, -6, 1]$. Låt nu matriserna D och P vara definierade genom

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då gäller $A = PDP^{-1}$ och $A^n = PD^nP^{-1}$. Då $n \rightarrow \infty$ får vi $A^n \rightarrow PD_1P^{-1}$ där

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vanlig uträkning visar att

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } PD_1P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som alltså är gränsvärdet.

3. (a) Om $\mathbf{p}$ och $\mathbf{q}$ båda ligger i $\mathbb{P}_2$ så gäller

$$T(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(1) + \mathbf{q}(1) \\ \mathbf{p}'(1) + \mathbf{q}'(1) \\ \mathbf{p}''(1) + \mathbf{q}''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}'(1) \\ \mathbf{p}''(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}(1) \\ \mathbf{q}'(1) \\ \mathbf{q}''(1) \end{bmatrix} = T(\mathbf{p}) + T(\mathbf{q}).$$

Om dessutom c är en konstant så har vi

$$T(c\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} c\mathbf{p}(1) \\ c\mathbf{p}'(1) \\ c\mathbf{p}''(1) \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}'(1) \\ \mathbf{p}''(1) \end{bmatrix} = cT(\mathbf{p}).$$

Dessa två egenskaper karakteriserar en linjär avbildning så beviset är klart.

- (b) Avbildningens matris ges av $[T(1) \ T(t) \ T(t^2)]$. Detta leder alltså till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. (a) Att W är ett underrum följer av att den är nollrummet för en matris.

- (b) Man kan lösa uppgiften på minst två sätt. Dels kan man bestämma projektionen av bfb på W genom att utnyttja att denna enkelt kan bestämmas om man har en ortogonal bas, dels kan man använda sig av minstakvadratmetoden på ett lämpligt system. Vi bestämmer först en bas för W genom lösa ekvationssystemet. Efter att dragit 2 ggr ekv1 från ekv2 har man

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Här adderar vi ekv2 till ekv 1 varefter vi dividerar ekv 2 med -3. Vi får då

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Variablerna x_3 och x_4 är fria så vi får

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan därför använda vektorerna $\mathbf{v}_1 = [-1 \ 2 \ 1 \ 0]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [2 \ -1 \ 0 \ 1]^T$ som basvektorer för W men dessa är inte ortogonala.

Variant 1.

Vi går vidare med att skaffa oss en ortogonal bas $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ för W . Som $\mathbf{u}_1$ tar vi $\mathbf{v}_1$ och väljer sedan $\mathbf{u}_2 = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$ så att denna är ortogonal mot $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$. Det vill säga att vi skall ha $\mathbf{v}_1 \cdot (s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2) = 0$. Eftersom $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 6$ och $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -4$ ger detta att vi skall välja s och t så att $6s - 4t = 0$, exempelvis $s = 2$ och $t = 3$, dvs

$$\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = [4 \ 1 \ 2 \ 3]^T$$

Den vektor i W som ligger närmast $\mathbf{b}$ är dess projektion på W som vi med vår ortogonala bas kan framställa som vektorn

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1 + \frac{1}{5} \mathbf{u}_2$$

dvs

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det sökta avståndet är sedan längden av vektorn $\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}$ dvs

$$\sqrt{(3 - \frac{9}{5})^2 + (1 + \frac{9}{5})^2 + (-5 + \frac{3}{5})^2 + (1 - \frac{3}{5})^2} = \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

Variant 2.

Vi skulle helst velat ha $\mathbf{b}$ i W dvs

$$\mathbf{b} = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2$$

för någon vektor $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$. Låter vi A vara den matris som har $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ som kolonner så är $W = \text{Col } A$. Detta ger att projektionen av $\mathbf{b}$ på W får vi med hjälp av minstakvadratlösningen till systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ dvs

$$A^T A \mathbf{y} = A^T \mathbf{b}.$$

Här har vi

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

och

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Detta leder till att systemet $A^T A \mathbf{y} = A^T \mathbf{b}$ har lösningen

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}.$$

Projektionen av $\mathbf{b}$ på $W = \text{Col } A$ är därför

$$\hat{\mathbf{b}} = A \hat{\mathbf{y}} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och fortsättningen följer som i första varianten.

Svar till Tilläggsuppgifterna

K1 Lös på vanligt sätt ekvationssystemet som bildas av de tre ekvationerna, det ger lösningen $x = 1 + 3t$, $y = -5t$, $z = t$ där t är en godtycklig parameter.

K2 Från boken vet vi att lösningarna till systemet kan skrivas

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och eftersom vi känner värdet då $t = 0$ får vi

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dvs

$$\begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

och alltså $c_1 = 1.5$ och $c_2 = 0.5$. Detta ger svaret

$$\mathbf{x}(t) = 1.5 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Då är likheten $X^2 = -I$ ekvivalent med att

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Likheterna på platserna (1,1) och (2,2) ger att varken b eller c kan vara noll. Det ger på plats (1,2) och (2,1) att enda möjligheten är att $a + d = 0$ dvs $d = -a$. Då ser vi att vi har likhet också på platserna (1,2) och (2,1) exakt då $bc = -1 - a^2$. Svaret skulle alltså vara

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \text{ där } bc = -1 - a^2$$