

Lösningar till Linjär algebra och flervariabelanalys I, del A 24/8-2002

- Nej, det är inget underrum. Exempelvis ligger inte nollvektorn i planet.
 - Ja, så kan det vara. Exempelvis systemet med två obekanta: $x + y = 0$, $2x + 2y = 0$, $3x + 3y = 0$ med tre ekvationer och oändligt många lösningar.
 - Ja en linjärt oberoende mängd kan utvidgas till en bas och antalet element i denna är dimensionen.
 - Nej om $\det A = 3$ så gäller $\det A^2 = (\det A)^2 = 9$.
 - Nej det finns inget sådant samband. Till exempel är matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

inverterbar men ej diagonaliserbar.

- Att söka en linje $y = ax + b$ som i minstakvadratmetodens mening bäst anpassar till punkterna $(1, 1)$, $(2, 2)$ och $(3, 4)$ är detsamma som att i minstakvadratmetodens mening lösa systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Detta gör man genom att lösa det system man får genom att multiplicera med koefficientmatrisens konjugat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Detta system har lösningen $a = 3/2$ respektive $b = -2/3$. Den sökta linjen är därför

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}.$$

- Observera först att A är självinvers är detsamma som att $A^2 = I$.

(a) Antag att A är självinvers, dvs $A^2 = I$. Då gäller

$$B^2 = \frac{1}{4}(I - A)^2 = \frac{1}{4}(I^2 - IA - AI + A^2) = \frac{1}{4}(I - A - A + I) = \frac{1}{2}(I - A) = B.$$

Alltså är B idempotent.

(b) Antag nu istället att B är idempotent, dvs $B^2 = B$. Då har vi $A^2 = (I - 2B)^2 = I - 2B - 2B + 4B^2 = I - 4B + 4B = I$ så A är självinvers.

- Låter vi $\mathbf{p}_n$ vara sannolikhetsfördelningen för de olika områdena dag n , så har vi sambandet

$$\mathbf{p}_{n+1} = A\mathbf{p}_n$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

För den långsiktiga fördelningen $\mathbf{p} = [x \ y \ z \ w]^T$ har vi

$$\mathbf{p} = A\mathbf{p}$$

och dessutom förstås $x + y + z + w = 1$. Förutom den sista ekvationen ger det oss systemet

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}w & (1) \\ y = \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}w & (2) \\ z = \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}w & (3) \\ w = x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z & (4) \end{cases}$$

Här ser vi av (2) och (3) att $y = z$ vilket i (2) ger $y = z = 3w/8$. Sätter vi in detta i (1) har vi

$$x = \frac{1}{8}w + \frac{1}{8}w + \frac{1}{2}w = \frac{3}{4}w$$

Eftersom alltså dessutom $x + y + z + w = 1$ får vi $w = 0.4$. Sannolikheterna i de olika områdena är således 0.30, 0.15, 0.15 respektive 0.40.

- K1 Vektorn $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 0, 1)$ och $\mathbf{v}_3 = (4, -1, 1)$ precis när det finns tal $c(1)$, c_2 , c_3 så att

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3.$$

Eftersom $\mathbf{v}_3$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, det gäller $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, så kan den tas bort och frågan blir om det finns $c(1)$, c_2 så att

$$\mathbf{v} = c(1)\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2.$$

Detta är ekvivalent med att följande system är konsistent.

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 2 \\ -c_1 \quad \quad = 1 \\ \quad \quad c_2 = -1 \end{cases}$$

Detta system är uppenbart inte konsistent så vektorn $\mathbf{v}$ är inte en linjärkombination av de tre övriga.

- K2 Låt $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [2 \ 1 \ 1]^T$ och $\mathbf{v}_3 = [1 \ 1 \ 2]$. Direkta uträkningar visar att $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$ och $A\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_3$. De tillhörande egenvärdena är alltså 1, 2 respektive 3. Vi kan därför ta

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- K3 Vi undersöker hur en godtycklig punkt (a, b, c) avbildas. Normallinjen genom (a, b, c) till planet har ekvationen

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t(1, -2, 2).$$

Vi ser efter för vilket t -värde den skär planet. Dubblerar vi sedan detta t -värde får vi spegelpunkten. Skärningspunkten med planet har vi då

$$(a + t) - 2(b - 2t) + 2(c + 2t) = 0.$$

Detta innebär att skärningen är då $t = -(a - 2b + 2c)/9$ och att vi får spegelpunkten genom att sätta in $t = -2(a - 2b + 2c)/9$ i linjens ekvation. Detta ger oss spegelbilden

$$\begin{cases} x = (7a + 4b - 4c)/9 \\ y = (4a + b + 8c)/9 \\ z = (-4a + 8b + c)/9 \end{cases}$$

Härur kan vi utläsa att avbildningens matris är

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$