

Lösningar till TMA315A linjär algebra och flervariabelanalys del A för I1 den 15/1-03

1. Vi behandlar (a) och (b) samtidigt och betraktar den utvidgade matrisen

$$[A \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & p \end{bmatrix}$$

Genom uppenbara elementära radoperationer får vi att denna är radekvivalenta med

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 8 & p+1 \end{bmatrix} \text{ och sedan } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+2 \end{bmatrix}.$$

Nu tittar vi på de olika delfrågorna.

- (b) Vi kan direkt utläsa att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart precis då $p = -2$.

- (a) Eftersom de två första kolonnerna är pivotkolonner i den trappstegsreducerade matrisen, är de två första kolonnerna i A bas för kolonnrummet till A . Alltså, en bas för kolonnrummet ges av vektorena $[1 \ 1 \ -1]^T$, $[2 \ -2 \ 2]^T$.

För att bestämma en bas för nollrummet byter vi ut den sista kolonnen i den utvidgade matrisen mot enbart nollor och adderar 0.5 ggr rad 2 till rad 1 och får

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nollrummet består alltså av alla $\mathbf{x}$ sådana att $x_1 = 0$ och $2x_2 = -3x_3 - 4x_4$ dvs

$$\mathbf{x} = s[0 \ -3 \ 2 \ 0]^T + t[0 \ -2 \ 0 \ 1]^T, \text{ där } s \text{ och } t \text{ godtyckliga.}$$

En bas för nollrummet ges alltså av vektorena $[0 \ -3 \ 2 \ 0]^T$ och $[0 \ -2 \ 0 \ 1]^T$.

2. (a) Sant. Eftersom $A(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x})$ om $A(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, så kan $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ inte ha mer än en lösning om $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ bara har en lösning. Att $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ har minst en lösning följer av att $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alltid är en.
- (b) sant. Genom att multiplicera likheten med A^{-1} från både höger och vänster får vi

$$A^{-1}ABA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1} \text{ vilket ger } BA^{-1} = A^{-1}B.$$

- (c) Falskt. Låt till exempel A vara enhetsmatrisen av ordning 3. Då gäller $\det(-A) = -1 = -\det A$.
- (d) Sant. Låt $\mathbf{e}$ vara den kolonnvektor vars första element är 1 och övriga 0. Då gäller $A\mathbf{e} = \mathbf{0} = 0\mathbf{e}$.
- (e) Falskt. Exempelvis ligger inte nollvektorn i mängden.

3. De fyra punkterna ger att vi egentligen skulle vilja ha följande fyra ekvationer uppfyllda:

$$\begin{aligned} (-1, 2): \quad a - b + c &= 2 \\ (0, 1): \quad c &= 1 \\ (1, 0): \quad a + b + c &= 0 \\ (2, 1): \quad 4a + 2b + c &= 1 \end{aligned}$$

Detta system är överbestämt. Vi skriver det å formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

minsta kvadratlösning till ett system $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ får vi genom $A^T A(\mathbf{x}) = A^T \mathbf{b}$. Detta system har den utvidgade matrisen $[A^T A \ A^T \mathbf{b}] = A^T [A \ \mathbf{b}]$ där vi har

$$A^T [A \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Detta är den utvidgade matrisen för det sökta kvadratiske systemet. Vi börjar med att dividera alla raderna med två och subtraherar därefter summan av de två sista raderna från den första. Det ger oss den radekvivalenta matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ som är ekvivalent med } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Denna är i sin tur ekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & -5 & -3.5 \end{bmatrix}$$

vilket leder till att $a = 0.5$, $b = -0.9$ och $c = 0.7$.

4. Vi visar att matrisen A har egenvärdena 1 och -1 och att dimensionen på motsvarande egenrum är 2 respektive 1. Eftersom matrisen är symmetrisk är egenvektorer som svarar mot -1 ortogonala mot egenrummet som svarar mot egenvärdet 1. Detta egenrum har alltså dimensionen 2 och är därmed ett plan genom origo. Vektorerna i detta plan påverkas inte av avbildningen medan vektorer ortogonala mot planet får sin riktning omkastad men behåller sin längd. Avbildningen är då en spegling i det plan som är egenrum till egenvärdet 1.

För att bestämma egenvärdena löser vi ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0.6 & 0 & -0.8 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 0.64 - 0.36) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Det återstår alltså bara att bestämma egenrummet som svarar mot $\lambda = 1$. Detta får vi som lösningarna till systemet $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som utskrivet är

$$\begin{cases} -0.2x + 0.6z = 0 \\ 0.6x - 1.8z = 0 \end{cases}$$

Egenrummet är alltså planet $x - 3z = 0$.

Tilläggsuppgifterna

- K1. Matrisen A är inte kvadratisk och kan alltså inte vara inverterbar. Matrisen B har determinant 0 och är därför inte inverterbar ($\text{rad1} = \text{rad2} + \text{rad3}$). Matrisen C har determinant $\neq 0$ så den är inverterbar, vi bestämmer inversen. Vi startar med $[A \ I]$ och överför den med elementära radoperationer på en matris av formen $[I \ B]$. Då är $A^{-1} = B$. När man genomför detta får man

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- K2. Låt $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^T$ och $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1]^T$. Den sökta matrisen är då $A = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2)]$. För att bestämma bilderna $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ använder vi hur hörnpunkterna (1,2) och (1,3) avbildas. Eftersom T är linjär kan detta skrivas

$$T(\mathbf{e}_1) + 2T(\mathbf{e}_2) = -5\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 \quad \text{respektive} \quad T(\mathbf{e}_1) + 3T(\mathbf{e}_2) = -8\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2.$$

Subtraktion av dessa ger

$$T(\mathbf{e}_2) = -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

vilket i sin tur med hjälp av den första likheten ger

$$T(\mathbf{e}_1) = -2T(\mathbf{e}_2) - 5\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2.$$

Dvs

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

varför den sökta matrisen är

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

K3. Systemet kan skrivas $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

För denna matris har vi $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 6$ vilket ger att egenvärdena är -3 och 2. En egenvektor till respektive egenvärde är $[1 \ -2]^T$ respektive $[2 \ 1]^T$. Med

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

har vi då

$$A = PDP^{-1}.$$

Vi inför ny funktion, $\mathbf{y}(t)$, genom $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$. Detta leder i differentialekvationen till

$$P\mathbf{y}'(t) = AP\mathbf{y}(t) \text{ dvs } \mathbf{y}'(t) = P^{-1}AP\mathbf{y}(t) = D\mathbf{y}(t).$$

Vi har nu kopplat isär ekvationerna till att svara mot $y_1' = -3y_1$ respektive $y_2' = 2y_2$. Vi har därför $y_1 = C_1e^{-3t}$ respektive $y_2 = C_2e^{2t}$ och alltså

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1e^{-3t} \\ C_2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1e^{-3t} + 2C_2e^{2t} \\ -2C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} \end{bmatrix}.$$