

## Tentamen i TMA315 Linjär algebra och flervariabelanalys del B, 030531 kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: typgodkänd räknare.

Telefon: Axel Målqvist 0740 - 45 90 22.

Skriv namn och personnummer på varje inlämnat papper, samt linje och inskrivningsår på omslaget. Uppgift 1, 3, 4 och 5 ger maximalt 6 poäng vardera, uppgift 2 upp till 8 poäng.

Kompletteringsuppgifterna 6-11 ger vardera högst 3 poäng.

---

1. Beräkna  $\int_E y \frac{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$ , där  $E$  bestäms av olikheterna  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $y \geq 0$ .
2. Beräkna kurvintegralen  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  där  $\mathbf{F}(x, y) = (y - \sin x, -x - \sin y^2)$  och
  - a)  $C$  är rätta linjen från origo till  $(\pi, 0)$ ,
  - b)  $C$  är linjen i a) följd av kurvan  $y = \sin x$  från  $(\pi, 0)$  tillbaka till origo (en sluten kurva).
3. Den totala produktionen  $P$  av en vara beror på mängden utträttat arbete  $L$  (mätt t ex i arbetstimmar) och mängden investerat kapital  $K$ . Vi antar nu att produktionen följer *Cobb-Douglas modell*  $P = bK^\alpha L^{1-\alpha}$ , där  $\alpha$  är en konstant mellan 0 och 1, och  $b$  är en positiv konstant. Antag också att kostnaderna per enhet av  $K$  respektive  $L$  är  $k$  respektive  $l$  (konstanter), och att man totalt vill spendera det givna beloppet  $p$ . Visa att den maximala produktionen under detta villkor ( $kK + lL = p$ ) inträffar då
$$K = \frac{\alpha p}{k} \text{ och } L = \frac{(1 - \alpha)p}{l}.$$
4. a) Ange sambandet mellan vanliga koordinater  $(x, y, z)$  och *sfäriska koordinater*  $(r, \phi, \theta)$ . Illustrera med en figur!  
b) Låt  $K$  och  $K'$  vara ett område beskrivet i vanliga respektive sfäriska koordinater. Om  $\int_K xz dx dy dz = \int_{K'} g(r, \phi, \theta) dr d\phi d\theta$ , vad är  $g(r, \phi, \theta)$ ?  
c) Antag  $K$  är det område som bestäms av olikheterna  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ , och  $0 \leq y \leq x$ . Beskriv motsvarande område  $K'$  i sfäriska koordinater.
5. a) Vad menas med att en funktion av två variabler är *differentierbar* i en punkt  $(a, b)$ ?  
b) Bevisa att en funktion som är differentierbar i  $(a, b)$  har partiella derivator i  $(a, b)$ . (En av derivatorna räcker!)

**Var god vänd!**

### Uppgifter för komplettering av den löpande examinationen.

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om du vill komplettera dina poäng från detta moment, kan du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges för vem uppgiften är aktuell. T. ex. anger (<12) att uppgiften gäller för dig vars poäng är mindre än 12. Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om du t ex har 11 poäng från tidigare examination och löser uppgift 9 helt korrekt, så kommer du trots detta bara upp i 12 p. Fullständiga lösningar krävs även för dessa uppgifter.

6.(<3) Vektorerna  $(1, 0, 1, 0)$  och  $(-1, 1, 0, 2)$  spänner upp ett underrum  $V$  av  $\mathbf{R}^4$ . Ange två *ortogonala* vektorer som spänner upp  $V$ .

7.(<6) Beräkna största och minsta värdena av den kvadratiske formen  $x^2 + xy + y^2$  då  $x^2 + y^2 = 2$ .

8.(<9) Bestäm *riktningsderivatan* av funktionen  $f(x, y, z) = xy^2 \ln z + x^2 y$  i punkten  $(1, -1, 1)$  i riktning mot punkten  $(-1, 1, 2)$ .

9. (<12) Funktionen  $f(x, y) = x^2 y^3 + (y - 1)^2$  har kritisk (stationär) punkt i  $(0, 1)$ . Avgör om detta är ett lokalt maximum, lokalt minimum eller sadelpunkt.

10.(<15) Bestäm *Taylorpolynomet* av grad 2 för  $f(x, y) = x^3 + xy + y^4$  kring  $(1, -1)$ .

11.(<18) Beräkna  $\int_B (2x^2 + y) dA$ , där  $B$  är det område som bestäms av olikheterna

$$0 \leq x \leq 1, y \geq 0, y \leq x^2 + 1 \text{ och } y \leq \frac{1}{x}. \text{ Ledning: gör en substitution!}$$

Lycka till! /LF

## Svar och korta lösningsanvisningar

1.  $\frac{2}{3} \left( 15^{\frac{3}{2}} - 12^{\frac{3}{2}} \right) \approx 11,017$ . Räkna i polära koordinater:  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ,  $1 \leq r \leq 2$ .
2. a) -2. Kurvintegralen blir enkelintegralen  $\int_0^\pi (-\sin x) dx$  då  $y = 0$ ,  $dy = 0$ .  
b) -4. Tillämpa Greens formel.
3.  $K = \frac{\alpha p}{k}$ ,  $L = \frac{(1-\alpha)p}{l}$ . Bivillkoret  $kK + lL = p$ ,  $K \geq 0$ ,  $L \geq 0$  definierar en kompakt mängd (en sträcka),  $P(K, L)$  är kontinuerlig. Då existerar minimum och maximum, minimum noll på randen, maximum i en inre punkt på sträckan där  $\nabla P$  och  $\nabla(kK + lL)$  är linjärt beroende, dvs parallella.
4. a) Se lärobok!  
b)  $g(r, \phi, \theta) = r^4 (\sin \phi)^2 \cos \phi \cos \theta$ . Glöm inte Jacobianen  $r^2 \sin \phi$ !  
c)  $K' = \left\{ (r, \phi, \theta); 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$
6. T.ex.  $(1, 0, 1, 0)$  och  $(-1, 2, 1, 4)$ . Gram-Schmidts metod går bra.
7. Minsta värde är 1, största värde är 3. Använd att  $\lambda_{\min}(x^2 + y^2) \leq Q(x, y) \leq \lambda_{\max}(x^2 + y^2)$ .
8.  $\frac{7}{3}$ . Använd gradientformel för riktningsderivata. Riktningen ges av vektorn  $(-1, 1, 2) - (1, -1, 1) = (-2, 2, 1)$ , normera denna.
9. Lokalt minimum. ( $D = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$ ,  $f''_{xx} > 0$  i den aktuella punkten).
10.  $P_2(x, y) = 1 + 2(x-1) - 3(y+1) + 3(x-1)^2 + (x-1)(y+1) + 6(y+1)^2$ .
11. 1,5. Bra substitution:  $u = y - x^2$ ,  $v = xy$ . Jacobianen blir  $\frac{1}{2x^2 + y}$ , så den nya integranden blir 1. Integralen blir då arean av det nya området i  $uv$ -planet.