

Tentamen i TMA315 Linjär algebra och flervariabelanalys för I, del B

Datum: 2004-01-10 kl 14.15 - 18.15

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare.

Telefon: Alexander Herbertsson, tel 0740 - 45 90 22.

Skriv namn och personnummer på varje inlämnat papper, samt linje och inskrivningsår på omslaget.

Uppgifterna 1-4 ger maximalt 6 poäng, uppgift 5 maximalt 8 poäng.

Kompletteringsuppgifterna ger vardera högst 3 poäng.

1. Beräkna volymen av området som begränsas av ytorna $z = 3x^2 + 3y^2$ och $z = 4 - x^2 - y^2$.
2. Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbf{F}(x, y) = (x^3, x^2 + e^y)$ utför när en partikel rör sig längs
 - a) x-axeln från $(1, 0)$ till $(0, 0)$ och därefter y-axeln från $(0, 0)$ till $(0, 1)$.
 - b) enhetscirkeln från $(1, 0)$ till $(0, 1)$.
3. Motivera att funktionen $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ har ett största och ett minsta värde då $x \geq 0$ och $y \geq 0$, och beräkna dessa.
4.
 - a) Vad menas med *gradienten* till en funktion $f(x, y)$? (Ge en definition.)
 - b) Vad menas med *riktningsderivatan* till f i en punkt (x, y) i riktning $\mathbf{u}$ (vektor av längd 1)? (Ge en definition.)
 - c) Vilket samband råder mellan riktningsderivata och gradient om f är differentierbar?
 - d) Beräkna riktningsderivatan av $f(x, y) = xy^2$ i punkten $(4, 5)$ i den riktning som ges av vektorn $(1, 1)$.
5.
 - a) Bevisa att en funktion av två variabler som är differentierbar i en punkt också har partiella derivator i punkten.
 - b) Betrakta funktionen f som ges av $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ i övriga punkter. Utred om f har partiella derivator i $(0, 0)$ och om den är differentierbar i $(0, 0)$.

Kompletteringsuppgifter: var god vänd!

Uppgifter för komplettering av den löpande examinationen

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om du vill komplettera din poäng från detta moment, kan du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges för vem uppgiften är aktuell. Tex anger (< 12) att uppgiften gäller för dig vars poäng från den löpande examinationen är mindre än 12. Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om du tex har 11 poäng från tidigare examination och löser uppgift 9 helt korrekt, så kommer du trots detta bara upp i 12 poäng.

Fullständiga lösningar krävs även för dessa uppgifter.

- 6(< 3) Vektorerna $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 1, 1)$ och $\mathbf{v} = (4, 3, 0, 0, 4)$ utgör bas för ett underrum V av $\mathbb{R}^5$. Bestäm en ortogonal bas för V .
- 7(< 6) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^3 + 4x^2y + y = z^2$ i punkten $(1, 0, 1)$.
- 8(< 9) Funktionen $f(x, y) = (1 + x)e^{xy}$ har en stationär (kritisk) punkt. Finn denna och avgör om den är ett lokalt maximum, lokalt minimum eller en sadelpunkt.
- 9(< 12) Bestäm Taylorpolynomet av ordning två till $f(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$ kring punkten $(1, -1)$.
- 10(< 15) Bestäm största och minsta värdena av $x^2 + 2y^2$ när $x^4 + y^4 = 5$, $x \geq 0$ och $y \geq 0$.
- 11(< 18) Beräkna $\int_K x^3 y^2 z \, dV$, där K bestäms av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ och $0 \leq z \leq xy$.

SVAR

- 1) 2π . Dubbelintegrera differensen mellan de två funktionsuttrycken över $x^2 + y^2 \leq 1$.
- 2) a) $e - \frac{5}{4}$. b) $e - \frac{7}{12}$. Använd a) och Greens formel!
- 3) Största värde $\frac{1}{3\sqrt{3}}$, minsta värde 0. Kompakt område, jämför randpunkter och stationära punkter i det inre!
- 4) d) $\frac{65}{\sqrt{2}}$.
- 5) b) $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, men f är *inte* differentierbar i $(0, 0)$.
- 6) En ortogonal bas för V är t ex $\{(1, 0, -1, 1, 1), (2, 3, 2, -2, 2)\}$.
- 7) $3x + 5y - 2z - 1 = 0$.
- 8) $(0, -1)$ är en sadelpunkt.
- 9) $1 - 3(x - 1) - 2(y + 1) + 6(x - 1)^2 + 6(x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2$.
- 10) Största värde är 5, minsta värde är $\sqrt{5}$.
- 11) $\frac{1}{110}$.