

Tentamen i TMA315 Linjär algebra och flervariabelanalys för I, del B

Datum: 2004-06-01 kl 08.45 - 12.45

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare.

Telefon: Anna Nyström, tel 0739 - 77 92 68.

Skriv namn och personnummer på varje inlämnat papper, samt linje och inskrivningsår på omslaget.

Uppgifterna 1-4 ger maximalt 6 poäng, uppgift 5 maximalt 8 poäng.

Kompletteringsuppgifterna ger vardera högst 6 poäng.

1. Mellan vilka värden varierar uttrycket $xy\sqrt{z}$ då x , y och z är tre icke-negativa tal med summan ett?
2. a) Skriv dubbelintegralen $\int_0^1 (\int_{2y}^2 f(x, y) dx) dy$ i omvänd integrationsordning.
b) Beräkna trippelintegralen $\int_D z dV$, där D är den del av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ där $y \geq 0$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. a) En partikel, som påverkas av kraftfältet $\mathbf{F} = (x - 2y, xy)$ förflyttas från punkten $(0, 2)$ till punkten $(3, 0)$ längs en rät linje. Beräkna arbetet som uträttas.
b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = (4x^3y^2 + 2xy^4, 2x^4y + 4x^2y^3 + 2y)$ är ett *gradientfält*, och utnyttja detta för att beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där C är enhetscirkeln genomlöst moturs från $(1, 0)$ till $(0, 1)$.
4. a) Vad menas med en *positivt definit* respektive *indefinit* kvadratisk form?
Ge exempel på båda!
b) Man vill avgöra karaktären hos en *stationär punkt* (critical point) (a, b) till en differentierbar funktion $f(x, y)$. Beskriv med utgångspunkt från Taylors formel hur detta kan återföras till problemet huruvida en speciell kvadratisk form (vilken?) är positivt eller negativt definit eller indefinit (fallet semidefinit lämnar vi därhän). Inga formler behöver härledas eller bevisas i denna uppgift.
5. a) Definiera den *partiella derivatan* av $f(x, y)$ med avseende på y i punkten (a, b) .
b) Definiera *differentierbarhet* för funktionen $f(x, y)$ i punkten (a, b) .
c) Formulera och bevisa *kedjeregeln* för en sammansatt funktion $u(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. (Det är tillåtet att välja $n = 2$, $\mathbf{x} = (x, y)$).

Kompletteringsuppgifter: var god vänd!

Uppgifter för komplettering av den löpande examinationen

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om du vill komplettera din poäng från detta moment, kan du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges för vem uppgiften är aktuell. Tex anger (< 12) att uppgiften gäller för dig vars poäng från den löpande examinationen är mindre än 12. Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas. Varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om du tex har 11 poäng från tidigare examination och löser uppgift 7 helt korrekt, så kommer du trots detta bara upp i 12 poäng.

Fullständiga lösningar krävs även för dessa uppgifter.

- 6(< 6) Undersök kurvan $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 5$ (ON-bas) genom ett lämpligt ortogonalt basbyte. Rita också kurvan i en figur där både nya och gamla koordinataxlar är utsatta med skalor.
- 7(< 12) a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ i punkten $(1, -1, 2)$.
- b) Visa att ytan $x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0$ skär den förra ytan under rät vinkel i punkten $(1, -1, 2)$, dvs att ytornas tangentplan i denna punkt är vinkelräta mot varandra.
- c) Bestäm en ekvation för tangenten till ytornas skärningskurva i punkten $(1, -1, 2)$.
- 8(< 18) Undersök om funktionen

$$f(x, y) = \frac{2x^2 + 4y^2 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + 2y^2 + x^2y^2}$$

har något gränsvärde då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

LYCKA TILL! /LF

SVAR OCH LÖSNINGSTIPS TILL UPPGIFT 1-3

1. Svar: Varierar mellan 0 och $\frac{4}{25\sqrt{5}} \approx 0,07155$.

Funktionen är noll på hela randen, uppenbarligen minsta värdet. Mängden (en triangelnskiva) är kompakt, funktionen kontinuerlig: då finns enligt en sats också ett största värde. Substituera bort z , leta stationära punkter i det inre:

$\{(x, y) : x + y < 1, x > 0, y > 0\}$. En enda lösning $x=y=\frac{2}{5}$: där finns största värdet. Alternativt kan den sista delen göras genom att $x + y + z = 1$ uppfattas som ett bivillkor, behåll då den ursprungliga funktionen av tre variabler, sök de inre punkter i vilka $xy\sqrt{z}$ och $x + y + z$ har parallella gradienter. Också här bara en lösning ($x = y = \frac{2}{5}$, $z = \frac{1}{5}$) då $x + y + z = 1$ och alla koordinater > 0 .

2. a) Svar: $\int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dy \right) dx$. Rita figur!

b) Svar: π .

Med *sfäriska koordinater*: $z = r \cos \phi$, Jacobianen $= r^2 \sin \phi$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 2,$$

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Alternativt: integrera i z -led först, från $\sqrt{x^2 + y^2}$ till $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, därefter en dubbelintegral över $x^2 + y^2 \leq 2$ (som är ortogonalprojektion av D på xy -planet). Använd polära koordinater i denna. (Detsamma som att använda *cylindriska koordinater*).

3. a) Svar: -3,5. Beräknas lättast genom att parametrisera kurvan direkt, t ex: $(x, y) = (0, 2) + t(3, -2)$, $0 \leq t \leq 1$.
Integrera $\mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 9t - 12 + 12t^2$ från 0 till 1.

b) Svar: 1.

Med $\mathbf{F} = (P, Q)$, testa om $P'_y = Q'_x$ (vilket medför att $\mathbf{F}$ är ett gradientfält), eller visa direkt att det finns en *potentialfunktion* $\phi(x, y)$ med $\nabla \phi = \mathbf{F}$. Integralen är då lika med $\phi(0, 1) - \phi(1, 0)$.

Alternativt, utan att beräkna en potential, byt till en enklare väg via koordinataxlarna (med gradientfält kan man byta kurva)!

UPPGIFT 6-8 PÅ NÄSTA SIDA

SVAR TILL UPPGIFT 6-8

6. Svar: en ellips med ekvationen $2u^2 + v^2 = 1$ i en lämplig ON-bas. u- och v-axlarnas riktningar ges av $(2, -1)$ respektive $(1, 2)$.
7. a) Tangentplanet har ekvationen $2x - y + 2z - 7 = 0$.
- b) Om ytorna uppfattas som nivåytor till 3-variabelfunktioner, visa att gradienterna till dessa är ortogonala (skalärprodukt noll) i den aktuella punkten.
- c) Tangenten har ekvationen $(x, y, z) = (1, -1, 2) + t(2, 2, -1)$.
8. Gränsvärde finns och är 2. Visa att $|f - 2| \rightarrow 0$. (Polära koordinater går bra).