

Tentamen i TMA315 Linjär algebra och flervariabelanalys för I, del B

Datum: 2004-08-21 kl 08.45 - 12.45

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare.

Telefon: Georgios Foufas, tel 0702 - 74 09 02, Johan Jansson, tel 0739 - 77 92 68.

Skriv namn och personnummer på varje inlämnat papper, samt linje och inskrivningsår på omslaget.

Uppgift 1 maximalt 8 poäng, uppgifterna 2-5 ger maximalt 6 poäng.

Kompletteringsuppgifterna ger vardera högst 6 poäng.

1. a) Beräkna volymen av det område som bestäms av olikheterna
 $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x^2, \quad 0 \leq z \leq y.$
b) Beräkna volymen av det område som bestäms av olikheterna
 $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq y.$
2. a) Visa att funktionen $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ har en stationär punkt (critical point) i $(1, 1)$ och avgör dess karaktär.
b) Beräkna kurvintegralen $\int_C xy dx + (y^2 - x^2) dy$ där C är högra hälften av enhetscirkeln genomlöpt från $(0, -1)$ till $(0, 1)$.
3. Beräkna det minsta avståndet från ytan $x^4 y^2 z = \frac{1}{4}$ till origo.
4. a) Ange sambandet mellan vanliga koordinater (x, y, z) och *sfäriska koordinater* (ρ, ϕ, θ) . Illustrera också med en figur, i vilken alla de inblandade koordinaterna för en punkt kan tolkas.
b) Följande uttrycker ett variabelbyte från vanliga till sfäriska koordinater:
$$\int_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_{D'} g(\rho, \phi, \theta) d\rho d\phi d\theta.$$
Ange funktionen $g(\rho, \phi, \theta)$.
c) Om området D definieras av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, \quad z^2 \leq x^2 + y^2, \quad x \geq 0$, beskriv området D' med olikheter för de sfäriska koordinaterna!
5. a) Ge exempel på ett vektorfält i planet som är ett *gradientfält*, och ange en *potentialfunktion* till fältet.
b) Bevisa att varje vektorfält som är kontinuerligt och konservativt (path-independent) i ett öppet område R är ett gradientfält i R .

Kompletteringsuppgifter: var god vänd!

Uppgifter för komplettering av den löpande examinationen

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om du vill komplettera din poäng från detta moment, kan du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges för vem uppgiften är aktuell. T ex anger (< 12) att uppgiften gäller för dig vars poäng från den löpande examinationen är mindre än 12. Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas. Varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om du t ex har 11 poäng från tidigare examination och löser uppgift 7 helt korrekt, så kommer du trots detta bara upp i 12 poäng.

Fullständiga lösningar krävs även för dessa uppgifter.

6(< 6) Bestäm en ortogonalmatrix P som diagonaliserar matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

och ange den aktuella diagonalmatrisen D . Ange också sambandet mellan matriserna A , P och D .

7(< 12) Låt $f(x, y, z) = (3z^2 - y)xz - 2x^3$ och låt $P = (-1, 1, 2)$.

- Beräkna riktningsderivatan av f i punkten P i riktning mot punkten $Q = (2, 7, 4)$.
- Bestäm den riktning i vilken f växer snabbast då man utgår från P .
- Bestäm en ekvation för tangentplanet genom punkten P till nivåytan $f(x, y, z) = -20$.

8(< 18) Man vill lösa den *partiella differentialekvationen*

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y \quad (x > 0, y > 0)$$

Genom variabelbytet $u = \frac{x^2}{y}$, $v = xy$, övergår ekvationen i en enklare ekvation som kan lösas. Sätt $f(x, y) = g(u, v)$ och översätt derivatorna av f till derivator av g med avseende på u och v med hjälp av kedjeregeln. Lös sedan differentialekvationen. (5 poäng för den nya ekvationen, 1 poäng för lösningen.)

LYCKA TILL! /LF

SVAR OCH KORTA LÖSNINGSTIPS

1. a) Svar: $\frac{4}{15}$
Upprepad integration: i y-led från 0 till $1 - y^2$, sedan i x-led från 0 till 1.
b) Svar: $\frac{8}{3}$
Som i a) (y från 0 till $\sqrt{4 - x^2}$, x från 0 till 2), eller polära koordinater:
 $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, Jacobian = r .
2. a) Svar: lokalt minimum.
Taylorpolynomet i $(1, 1)$: $P(h, k) = -2 + 6h^2 - 8hk + 6k^2$, den kvadratiska formen $6h^2 - 8hk + 6k^2$ visas vara positivt definit. Använd kvadratkomplettering, egenvärden eller ett kriterium för andraderivatorna!
b) Svar: $-\frac{4}{3}$
Parameterframställ halvcirkel: $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
Alternativt, ta randen till hela halvcirkelskivan med Greens formel, subtrahera integralen längs y-axeln (lättberäknad).
3. Svar: Minsta avståndet är $\frac{\sqrt{7}}{2}$.
Minimera avståndet i kvadrat $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (lättare än avståndet, minimeras samtidigt) under bivillkoret $g(x, y, z) = x^4 y^2 z = \frac{1}{4}$. Origo tillhör inte ytan, så det måste tydligen finnas ett minsta avstånd, som inte är noll. Där detta inträffar, måste gradienterna av f och g vara parallella. I kombination med bivillkoret ger detta $x^2 = 1$, $y^2 = \frac{1}{2}$, $z^2 = \frac{1}{4}$ (inga andra lösningar: maximum saknas). Med alla teckenvariationer ger detta 8 punkter, där $f = \frac{7}{4}$ (obs: avståndet i kvadrat).
4. b) Svar: $g(\rho, \phi, \theta) = \rho^4 \sin \phi$. (Jacobianen $\rho^2 \sin \phi$).
c) Svar: D' bestäms av olikheterna $0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$, $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
6. Svar: $A = PDP^T$, där

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Kolonnerna i P är normerade egenvektorer till A , diagonalelementen i D är motsvarande egenvärden.

7. a) Svar: $f'_{\vec{PQ}}(-1, 1, 2) = -\frac{10}{7}$.
Normera riktningsvektorn, skalärmultipliera med gradienten i P .
b) I riktningen $(16, 2, -35)$ (gradientens riktning).
c) Svar: $16x + 2y - 35z + 84 = 0$ (gradienten i P är normalvektor).
8. Svar: $f(x, y) = x^4 y + h(\frac{x^2}{y})$, där h är en godtycklig deriverbar funktion.
Kedjeregeln ger $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{2x}{y} + \frac{\partial g}{\partial v} y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} (-\frac{x^2}{y^2}) + \frac{\partial g}{\partial v} x$.
Efter variabelbytet får man den nya ekvationen $\frac{\partial g}{\partial v} = 2uv$. Lösning: $g(u, v) = uv^2 + h(u)$,
översatt till gamla koordinater.