

Tentamen i TMA315 Linjär algebra och flervariabelanalys del B, 030823 kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: typgodkänd räknare.

Telefon: Elizabeth Wulcan 0740 - 45 90 22.

Skriv namn och personnummer på varje inlämnat papper, samt linje och inskrivningsår på omslaget. Uppgift 1, 2, 4 och 5 ger maximalt 6 poäng vardera, uppgift 3 upp till 8 poäng.

Kompletteringsuppgifterna 6-11 ger vardera högst 3 poäng.

1. Beräkna $\int_E (x + y) dA$, där E är

- a) triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 4)$.
- b) parallelogrammen som bestäms av olikheterna $1 \leq x + y \leq 2$, $0 \leq 2y - x \leq 2$.

2. En plastindustri ska tillverka papperskorgar i form av rätblock (låda med angränsande sidoytor vinkelräta) utan lock och med volymen 25 liter. Väggarna ska tillverkas i plast, vars pris är 1 kr per dm^2 för den aktuella tjockleken. Botten ska göras av samma material, men 3 ggr tjockare (och dyrare), så att korgarna står stadigt. Beräkna den minimala tillverkningskostnaden för en korg av detta slag, och ange dess dimensioner i centimeter med en decimal. (Ej tillåtet att på förhand utgå ifrån några speciella proportioner för basytan, även om det kanske kan gissas!)

3. Här gäller det att beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$,

där $\mathbf{F}(x, y) = (y^3 - 15y, -x^3)$ och C är en enkel, sluten och glatt (eng: smooth) kurva, genomlöst ett varv moturs. Tre fall:

- a) C är kvadraten med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ och $(0, 1)$.
- b) C är enhetscirkeln.
- c) C är en kurva vald så att kurvintegralens värde blir maximalt.

4. a) Antag att funktionen $f(x, y)$ har kontinuerlig gradient. Ange en formel för att beräkna *riktningsderivatan* av f i en riktning som ges av enhetsvektorn $\mathbf{v}$, och förklara varför denna derivata blir störst om $\mathbf{v}$ har samma riktning som gradienten av f .

b) Antag att vi vill bestämma maximum av funktionen $f(x, y)$ i uppgift a) på ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1$. Ett sätt är att eliminera en variabel ur ellipsens ekvation, vilket är ganska besvärligt. Ett annat sätt är att betrakta ellipsens ekvation som ett *bivillkor* (*constraint*), och att använda t ex Lagranges multiplikator metod. Beskriv kort hur detta går till, och förklara (gärna med en figur) den matematiska idén bakom detta.

5. a) Vad menas med att en funktion av två variabler är differentierbar i en punkt?

b) Formulera och bevisa kedjeregeln för en differentierbar funktion av två variabler, som i sin tur är funktioner av en variabel.

Var god vänd!

Uppgifter för komplettering av den löpande examinationen.

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om du vill komplettera dina poäng från detta moment, kan du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges för vem uppgiften är aktuell. T. ex. anger (<12) att uppgiften gäller för dig vars poäng är mindre än 12. Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas. Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om du t ex har 11 poäng från tidigare examination och löser uppgift 9 helt korrekt, så kommer du trots detta bara upp i 12 p. Fullständiga lösningar krävs även för dessa uppgifter.

6.(<3) Kontrollera att matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Diagonalisera A ortogonalt genom att utnyttja detta.

7.(<6) Klassificera den kvadratiske formen $x^2 + 4xy + y^2$ och ange dess maximala värde då $x^2 + y^2 = 1$.

8.(<9) Bestäm en ekvation för *tangenten* till nivåkurvan $f(x, y) = 3$ i punkten $(1, -1)$, då $f(x, y) = xy^3 + 4\sqrt{x}$, och beräkna riktningsderivatan av f i samma punkt i den riktning som f tillväxer snabbast.

9.(<12) Bestäm *Taylorpolynomet* av grad 2 för $f(x, y) = 1 + 4\sqrt{x} + \ln(x^2 + y^2)$ kring $(1, 0)$.

10.(<15) Bestäm alla eventuella extrempunkter och sadelpunkter till funktionen $f(x, y) = 4x^2 + 12xy + 9y^2 + x^3$.

11.(<18) Tangerar planet $2x - 2y + 3z + 9 = 0$ ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$, och i så fall, vilken är tangeringspunkten?

Lycka till! /LF

SVAR

- 1) a) 4. Upprepad integration, $0 \leq y \leq 4x$, $0 \leq x \leq 1$.
b) 1. Variabelbyte: $u = x + y$, $v = 2y - x$. Jacobianen $= \frac{1}{3}$, integral över rektangel.
- 2) Botten 25,5cm x 25,5cm, höjden 38,3cm. Kalla sidorna x , y , z (höjden), eliminera z ur $xyz=25$ (enklast att räkna i dm). Sök stationära punkter osv. Bivillkorsmetod går också.
- 3) a) 13 (reducera till 4 enkelintegraler, eller använd Green).
b) $27\pi/2$ (Green).
c) $75\pi/2$ (Ta kurvan som innesluter hela området, där $Q'_x - P'_y$ är positivt.
Det är cirkeln $x^2 + y^2 = 5$. Green.)
- 6) $T^T AT = D$, där $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.
- 7) Indefinit, maxvärde då $x^2 + y^2 = 1$ är 3.
- 8) Tangenten ges av ekvationen $x + 3y + 2 = 0$ (normalvektor $\nabla f(1, -1) = (1, 3)$).
Maximal riktningsderivata i riktning $\nabla f(1, -1)$ är beloppet av denna gradient $= \sqrt{10}$.
- 9) $P_2(x, y) = 5 + 4(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + y^2$.
- 10) Enda stationära punkten $(0, 0)$ är en sadelpunkt.
 $f(h, k) - f(0, 0) = h^3$ antar både positiva och negativa värden i varje omgivning till $(0, 0)$.
- 11) Planet tangerar ellipsoiden i $(-2, 1, -1)$. Hitta de punkter (2 st) där normalvektorn (gradient) till ellipsoiden är parallell med planets normal. Testa om punkten ligger i planet. Detta gäller bara den ena punkten.