

Linjär algebra och flervariabelanalys del B för I1 (TMA315B) 2005-01-15

Skrivtid: 14.00-18.00

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare.

Telefon: , 073-977 92 68

För godkänt krävs minst 25 poäng. Häri ingår löpande examinationspoäng från vårterminen 2004.

Betyg 3: 25-31 poäng, betyg 4: 32-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Slutbetyg: addera resultaten från del A och del B, dubblera de ovan givna poängtalerna.

Besked om rättning och granskning av tentan ges på kursens hemsida:

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma315b/0304/

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

- 1 a) Bestäm alla eventuella lokala extrempunkter och sadelpunkter för funktionen (6p)

$$f(x, y) = (4xy - y^2)e^{2x}$$

- b) Bestäm största och minsta värdena av funktionen i a) i det slutna triangelområdet som begränsas av linjerna $y = 4x$, $x = 1$ och x-axeln. Motivera väl! (2p)

- 2 a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C 5y dx + 2x dy$$

där C är cirkeln $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ genomlöst ett varv *medurs*. (3p)

- b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C e^y dx + x e^y dy$$

där C är parabelbågen $y = \sqrt{x}$ från $(0, 0)$ till $(1, 1)$. (3p)

- 3 a) Beräkna trippelintegralen

$$\int_D \frac{1}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dV$$

där $D = \{(x, y, z) : y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$. (5p)

- b) Vilket värde har

$$\int_D \frac{1+x}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dV$$

om D är samma som i a)? (Observera den låga poängen på denna deluppgift!)
En kort motivering av svaret krävs. (1p)

- 4 a) Definiera *gradienten* av en funktion $f(x, y)$. (1p)

- b) Definiera *differentierbarhet* för en funktion $f(x, y)$ i en punkt (a, b) . (2p)

- c) En funktion som har partiella derivator i en punkt, behöver inte vara differentierbar i punkten. Ett något starkare villkor garanterar dock differentierbarhet. Vilket? (1p)

- d) Antag att funktionen $f(x, y)$ har kontinuerlig gradient. Ange en formel för beräkning av *riktningsderivatan* av f i punkten (a, b) i en riktning som ges av enhetsvektorn $\mathbf{v}$, och förklara varför denna derivata blir maximal om $\mathbf{v}$ har samma riktning som gradienten av f i punkten (a, b) . (2p)

- 5 a) Definiera begreppet *gradientfält*. (1p)

- b) Bevisa att varje vektorfält som är kontinuerligt och *konservativt* (engelska: *path-independent*) i ett öppet område R är ett gradientfält i R . (5p)

Var god vänd!

Uppgifter för komplettering av den löpande examinationen

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om du vill komplettera din poäng från detta moment, kan du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges för vem uppgiften är aktuell. T ex anger (< 12) att uppgiften gäller för dig vars poäng från den löpande examinationen är mindre än 12. Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas. Varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om du t ex har 11 poäng från tidigare examination och löser uppgift 7 helt korrekt, så kommer du trots detta bara upp i 12 poäng.

Fullständiga lösningar krävs även för dessa uppgifter.

6(<6) Den symmetriska matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- a) Vilka är motsvarande egenvärden?
 - b) Matrisen A har ytterligare ett egenvärde. Använd de två givna egenvektorer för att finna en tredje egenvektor och därmed det återstående egenvärdet. (Eller bestäm dem på annat sätt).
 - b) Matrisen A kan diagonaliseras enligt $A = PDP^T$, där P är en ortogonalmatris, D en diagonalmatris. Bestäm P och D så att detta gäller.
- 7**(<12) Bestäm det största värdet som funktionen $f(x, y) = 5x - y$ antar på kurvan $3x^2 + xy + y^2 = 6$.
- 8**(<18) Funktionen $f(x, y)$ definieras för $(x, y) \neq (0, 0)$ enligt

$$f(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2 + y^4}$$

- a) Visa att man kan tilldela f ett värde i $(0, 0)$ så att den blir kontinuerlig där.
- b) Beräkna $f'_x(0, 0)$
- c) Undersök om f'_x är kontinuerlig i $(0, 0)$.

Lycka till!
/LF

SVAR

1. a) Sadelpunkt: $(0, 0)$, lokal maximipunkt: $(-1, -2)$.
 b) Minsta värdet är 0 (på två av triangelns sidor), största värdet är $f(1, 2) = 4e^2$.
2. a) 15π
 b) e
3. a) $\frac{\pi}{3} \ln(1 + 2\sqrt{2})$
 b) $\frac{\pi}{3} \ln(1 + 2\sqrt{2})$
6. a) 0 respektive 5.
 b) -3

 c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$
7. $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$
8. a) $f(0, 0) = 0$
 b) $f'_x(0, 0) = 1$
 c) f'_x är ej kontinuerlig i $(0, 0)$.

Lösningstips på nästa sida!

LÖSNINGSTIPS

- Sök stationära punkter ($f = (0, 0)$), använd andraderivatorna för att klassificera dem!
 - Kolla om någon av de stationära punkterna ligger i det inre av triangelytan, ta i så fall vara på deras funktionsvärden (men ingen av dem ligger denna gång i det inre av triangelytan!). Undersök sedan randen, dvs triangelns sidor. Funktionen är noll på två av sidorna, positiv annars. Därmed är minsta värdet 0. Största värdet finns på sidan $x = 1$.
- Använd Greens formel, men med minustecken - kurvan har "fel" orientering.
 - Fältet är ett gradientfält: använd potential eller byt väg. En potential är $U(x, y) = xe^y$, då är integralen lika med $U(1, 1) - U(0, 0)$.
- Byt till sfäriska koordinater, glöm inte Jacobianen $\rho^2 \sin \phi$!
 - Den extra termen har integral noll pga udda symmetri: den byter tecken då man byter x mot $-x$, samtidigt som D är symmetriskt med avseende på x .
- Multiplisera A med respektive vektor, verifiera att vektorn då multipliceras med ett tal = egenvärdet. Observera att de givna vektorerna är ortogonala, och att de visar sig höra till olika egenvärden.
 - En vektor som är ortogonal mot de två givna, måste vara egenvektor till det återstående egenvärdet (A symmetrisk $\Rightarrow$ det finns en ON-bas av egenvektorer för $\mathbb{R}^3$). Konstruera en sådan vektor med kryssprodukt (eller Gram-Schmidt), ta reda på egenvärdet på samma sätt som i a!
 - D har de tre egenvärdena i huvuddiagonalen, resten nollor. P har som kolonner normerade egenvektorer för egenvärdena, tagna i den ordning de valts i D . Vi har redan egenvektorerna, återstår bara normering: $\|\mathbf{v}\| = 1$.
- Maximera $f(x, y) = 5x - y$ under bivillkoret $g(x, y) = 3x^2 + xy + y^2 = 6$. Motivera existensen av detta maximum! Lös sedan systemet

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0, \quad g(x, y) = 6$$

eller använd Lagranges multiplikator metod: lös systemet

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x, y) = 6$$

med x, y, z, λ som obekanta (undantagsfallet $\nabla g = \mathbf{0}$ ej aktuellt då $g = 6$). Två punkter hittas med båda metoderna: $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ och $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, jämför funktionsvärdena och välj det största.

- Med exempelvis polära koordinater kan vi se att $f(x, y)$ har gränsvärdet 0 då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Då får vi nämligen

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r}{1 + r^2 \sin^4 \theta} (\cos^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta),$$

som är produkten av en funktion som har gränsvärde 0 då $r \rightarrow 0$, och en funktion av θ som är begränsad. Den går mot 0 då $r \rightarrow 0$, oberoende av θ . Vi sätter $f(0, 0) = 0$, och f blir kontinuerlig i $(0, 0)$.

b) På x-axeln är $f(x, 0) = x$ (stämmer nu även i $(0, 0)$!), så $f'_x(x, 0) = 1$ för alla x .

c) Från b) vet vi att $f'_x(0, 0) = 1$. Med deriveringsregler beräknar vi f'_x på y-axeln (utom origo):

$$f'_x(0, y) = -\frac{1 + y^2}{1 + 2y^2 + y^4}.$$

Vi ser nu att detta uttryck går mot -1 då $y \rightarrow 0$, så f'_x är *inte* kontinuerlig i $(0, 0)$.