

Linjär algebra och flervariabelanalys del B för I1 (TMA315B)

2005-05-28

Skrivtid: 8.30-12.30

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare.

Telefon: Jonas Hartwig, 0762-72 18 60

För godkänt krävs minst 25 poäng. Häri ingår löpande examinationspoäng från vårterminen 2005.

Betyg 3: 25-31 poäng, betyg 4: 32-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Slutbetyg: addera resultaten från del A och del B, dubblera de ovan givna poängtalerna.

Besked om rättning och granskning av tentan ges på kursens hemsida:

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma315b/0405/

Varje uppgift i denna tentamen kan ge maximalt 6 poäng, utom nr 1 och nr 2, som ger upp till 7 poäng.

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

- 1 a) En känd idrottshall kan beskrivas som kroppen

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2500, 0 \leq z \leq 15 + \frac{x^2}{500}\},$$

där längdenheten är meter, x- och y-axlarna är utmed markplanet och z-axeln uppåt. Beräkna hallens volym. ($\cos^2 v = (1 + \cos 2v)/2$) om det skulle behövas). 5p

- b) Skriv omkretsen av takytan på hallen (dvs längden av takets kant) som en integral. Ange då först en parameterframställning $(x(t), y(t), z(t))$ av den aktuella kurvan. Obs: Integralen ska inte beräknas! 2p

- 2 Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då

- a) $\mathbf{F}(x, y) = (\sqrt{x^2 + 1} - 3y^2, x^2 + \ln(1 + y^2))$ och γ är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 1)$ och $(2, 4)$, genomlöst ett varv i positiv led (moturs). 5p

- b) $\mathbf{F}(x, y) = (1 + \cos y, \frac{1 - x \sin y}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}})$ (ett gradientfält?) och γ är kurvan $y = (x^2 + 1) \arctan \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ från $(0, \frac{\pi}{4})$ till $(1, \frac{2\pi}{3})$. 2p

- 3 Nu åter till idrottshallen i uppgift 1! Klockan 12 en vacker vårdag var temperaturen i en punkt (x, y, z) på K:s tak

$$T(x, y, z) = 10^{-3}(y^2 - xy + 500z),$$

där enheten är $^{\circ}\text{C}$. Mellan vilka värden varierade temperaturen på taket vid denna tidpunkt?

- 4 a) Ange *Taylorpolynomet* av grad 2 för en funktion $f(x, y)$ kring en punkt (a, b) . (Resttermen behöver inte anges här).
- b) Om (a, b) är en stationär punkt (critical point), redogör för hur man kan avgöra karaktären av (a, b) - om den är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt. (Valfri variant: enligt Calculusboken eller med stöd av kursen i linjär algebra). För full poäng, ge också en kort förklaring varför metoden fungerar, utgående från Taylors formel. Det fall som metoden inte biter på behöver inte beröras - se c)!
- c) Funktionen $f(x, y) = 1 + x^2 - y^3 + x^4 - y^5$ har stationär punkt i $(0, 0)$. Avgör dess karaktär.
- 5 a) Definiera den *partiella derivatan* med avseende på variabeln y av en funktion $f(x, y)$ av två variabler i punkten $(1, 2)$.
- b) Formulera *kedjeregeln* för en sammansatt funktion $u(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. (Det är tillåtet att välja $n = 2$, $\mathbf{x} = (x, y)$). Glöm inte att ange vilka förutsättningar som de inblandade funktionerna ska uppfylla!
- c) Bevisa kedjeregeln i den form du har valt i b)!

Var god vänd!

Uppgifter för komplettering av den löpande examinationen

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om du vill komplettera din poäng från detta moment, kan du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges för vem uppgiften är aktuell. T ex anger (< 12) att uppgiften gäller för dig vars poäng från den löpande examinationen är mindre än 12. Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas. Varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om du t ex har 11 poäng från tidigare examination och löser uppgift 7 helt korrekt, så kommer du trots detta bara upp i 12 poäng.

Fullständiga lösningar krävs även för dessa uppgifter.

- 6**(<6) a) Vilka är största och minsta värdena av den kvadratiske formen $Q(x, y) = 13x^2 + 37y^2 - 18xy$ på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$?
- b) Rita kurvan $13x^2 + 37y^2 - 18xy = 10$ genom att byta till en bas av egenvektorer till den symmetriska matris som representerar $Q(x, y)$. Både gamla och nya koordinataxlar ska synas.
- 7**(<12) Betrakta sfärerna $S_1 : (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$ och $S_2 : (x - 5)^2 + (y - 4)^2 + (z + 2)^2 = 1$.
- a) Låt P vara den punkt på S_1 som ligger närmast S_2 .
 Bestäm en ekvation för tangentplanet till S_1 i P .
- b) Beräkna riktningsderivatan av $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$ i punkten P i riktningen från P mot origo.
- c) Hur stor är den maximala riktningsderivatan i P ?

(Om punkten P är fel, kan du ändå få poäng för återstående delar av uppgiften.)

- 8**(<18) Antag $f(x, y) = F(r, \theta)$, där f är differentierbar, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Bevisa att

$$\|grad f\|^2 = (F'_r)^2 + \frac{1}{r^2}(F'_\theta)^2$$

Lycka till!
/LF

SVAR

1. a) $40625\pi \approx 127600m^3$
 b) $\int_0^{2\pi} \sqrt{2500 + 25 \sin^2 2t} \, dt$ (kan omskrivas på lite olika sätt).
2. a) 38
 b) $\frac{1}{2} + \frac{5\pi}{12}$
3. Temperaturen varierar mellan $7,5^\circ C$ och $11,25^\circ C$.
- 4c. Sadelpunkt.
6. a) Största värdet är 40, minsta värdet är 10.
 b) I det nya koordinatsystemet (u, v) har kurvan ekvationen $4u^2 + v^2 = 1$. Detta är en ellips med halvaxlarna $\frac{1}{2}$ längs u-axeln och 1 längs v-axeln. u-axeln är riktad som vektorn $(1, -3)$, v-axeln längs $(3, 1)$, men här finns flera valmöjligheter när det gäller plus och minus på axlarna. (Dessutom kan man kasta om u och v).
- 7 a) Tangentplanet i $P = (3, 2, -1)$ är $2x + 2y - z - 11 = 0$.
 b) $-\frac{22}{\sqrt{14}}$
 c) 6.

Lösningstips på nästa sida!

LÖSNINGSTIPS

1. a) $\text{volym}(K) = \int_M (15 + \frac{x^2}{500}) dA$ eller $\int_K 1 dV$.
I det förra fallet (dubbelintegral) är M cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 2500$, och integralen beräknas lättast med polära koordinater. Allra enklast blir det om man observerar att integralerna av x^2 och y^2 över M är lika, så

$$\text{volym}(K) = \int_M (15 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{500}) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{50} (15 + \frac{r^2}{1000}) r dr d\theta,$$

annars får man använda den föreslagna trigonometriska formeln!

Väljer man att trippelintegrera funktionen 1, får man efter z-integration direkt samma dubbelintegral.

- b) En bra parameterframställning är

$$(x, y, z) = (50 \cos t, 50 \sin t, 15 + 5 \cos^2 t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(Projektionen i xy-planet är ju en cirkel med radien 50, sätt sedan in $x = 50 \cos t$ i uttrycket $z = 15 + \frac{x^2}{500}$.) Kurvans längd är $\int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$.

2. a) Greens formel kan tillämpas (D är triangelytan vars rand är γ):

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + \ln(1 + y^2)) - \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{x^2 + 1} - 3y^2) \right) dA = \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{2x} (2x + 6y) dy dx$$

- b) Fältet är ett gradientfält (test: $Q'_x - P'_y = 0$) med potential $\Phi(x, y) = x + y + x \cos y$. Då är $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(1, \frac{2\pi}{3}) - \Phi(0, \frac{\pi}{4})$.

3. Takets ekvation $z = 15 + \frac{x^2}{500}$ substitueras in i temperaturfunktionen $T(x, y, z)$. Man får då en temperaturfunktion av 2 variabler, $t(x, y) = 10^{-3}(x^2 + y^2 - xy + 7500)$, som ska optimeras på den slutna cirkelskivan $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2500\}$.

- Finns största och minsta värde av $t(x, y)$ på M ? Ja, enligt en sats har varje kontinuerlig funktion både största och minsta värde på en kompakt mängd som M .
- $t(x, y)$ är differentierbar, så varje extrempunkt i *det inre* av M är en stationär punkt till $t(x, y)$. Den enda som finns är $(0, 0)$.
- På *randen* av M är $g(x, y) = x^2 + y^2 = 2500$, vilket kan ses som ett *bivillkor* då man optimerar $t(x, y)$ på randen. Max/min inträffar då i punkter där ∇t och ∇g är linjärt beroende (parallella). En metod utnyttjar att detta är ekvivalent med att determinanten av den matris, vars rader är dessa gradienter, är noll. Man finner att detta inträffar precis då $x = \pm y$. Sätt in i bivillkoret $g = 2500$, erhåll punkterna (a, a) , $(-a, -a)$, $(a, -a)$, $(-a, a)$, där $a = \sqrt{1250}$.
(Funktionen t kan eventuellt förenklas ytterligare inför dessa räkningar:
 $x^2 + y^2 = 2500 \Rightarrow t(x, y) = 10^{-3}(10000 - xy)$.)
- Jämför värdena i alla "misstänkta" punkter. Minst värde: $t(0, 0) = 7,5$, störst värde: $t(a, -a) = t(-a, a) = 11,25$.

4. c) $f(0, 0) = 1$. Titta på funktionens värden nära $(0, 0)$ på koordinataxlarna:
 $f(x, 0) = 1 + x^2 + x^4 > 1$ då $x \neq 0$.
 $f(0, y) = 1 - y^3 - y^5 < 1$ då $y > 0$.

Både värden > 1 och < 1 i varje omgivning av $(0, 0)$: *sadelpunkt*.

Kompletteringsuppgifterna på nästa sida.

6. a) Största och minsta värdet av $Q(x, y)$ är största respektive minsta egenvärdet till den symmetriska matrisen A som representerar $Q(x, y)$.
- b) I en ON-bas av egenvektorer till A har Q inga blandade termer: $Q = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$, där $\lambda_1 = 40$, $\lambda_2 = 10$. I denna bas ser man att kurvan $Q = 10$ är en ellips: $4u^2 + v^2 = 1$. Denna ellips är lätt att rita i det nya uv -systemet, vars axlar kan placeras i det gamla xy -systemet utmed de funna egenvektorens riktningar.
7. a) Medelpunkterna i S_1 och S_2 är $(1, 0, 0)$ respektive $(5, 4, -2)$. Vektorn från den förra till den senare är $\mathbf{v} = (4, 4, -2)$. Eftersom denna vektor har längd 6, och S_1 har radie 3, så är den punkt på S_1 som är närmast S_2 punkten $P = (1, 0, 0) + \frac{1}{2}\mathbf{v} = (3, 2, -1)$. Sfärernas närmaste grannar måste ju ligga på den gemensamma radien.
En normalvektor till tangentplanet för S_1 genom P är gradienten till funktionen $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$ i P , dvs vektorn $\nabla f(3, 2, -1) = (4, 4, -2)$ (inte oväntat: man kan inse att $\mathbf{v}$ är ortogonal mot sfären i P). Tangentplanets ekvation ges då av $(4, 4, -2) \cdot (x-3, y-2, z+1) = 0$.
- b) Riktningsvektor från P tillbaka mot origo: $(-3, -2, 1)$. Normera till enhetsvektor $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3, -2, 1)$. Den sökta riktningsderivatan är $f'_{\mathbf{e}}(3, 2, -1) = \mathbf{e} \cdot \nabla f(3, 2, -1)$.
- c) Maximal riktningsderivata i P erhålls i gradientens riktning och är lika med $\|\nabla f(3, 2, -1)\|$.
8. Kedjeregeln ger: $F'_r = f'_x x'_r + f'_y y'_r = f'_x \cos \theta + f'_y \sin \theta$, $F'_\theta = f'_x x'_\theta + f'_y y'_\theta = f'_x (-r \sin \theta) + f'_y r \cos \theta$.
Dividera med r i den senare, kvadrera och summera: $(F'_r)^2 + (\frac{1}{r}F'_\theta)^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 = \|\text{grad } f\|^2$.