

Linjär algebra och flervariabelanalys del B för I1 (TMA315B)

2005-08-20

Skrivtid: 8.30-12.30

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare.

Telefon: Elin Götmark, Elisabeth Wulcan, 076-272 18 60, 076-272 18 61.

För godkänt krävs minst 25 poäng. Häri ingår löpande examinationspoäng från vårterminen 2005.

Betyg 3: 25-31 poäng, betyg 4: 32-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Slutbetyg: addera resultaten från del A och del B, dubblera de ovan givna poängtalerna.

Besked om rättning och granskning av tentan ges på kursens hemsida:

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma315b/0405/

Varje uppgift i denna tentamen kan ge maximalt 6 poäng, utom nr 1 och 2, som kan ge upp till 7 poäng vardera.

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

- 1 (a) Skriv om den upprepade integralen

$$\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy \right) dx$$

i omvänd integrationsordning.

- (b) Beräkna volymen av området som definieras av olikheterna
 $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$ och $0 \leq z \leq x + y + 4$.

- 2 I ett koordinatsystem med längdenheten meter definieras läget av en ö av mängden
 $K = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 100\}$ och dess höjd över havet av funktionen
 $h(x, y) = 10^{-5}xy^2(100 - x - y)$.

- (a) Vilken är den högsta punkten på ön?
 (b) Om vi ställer oss i punkten (50, 25) och därifrån rör oss rätlinjigt i den riktning som i denna punkt ger brantast lutning *nedför*, i vilken punkt når vi stranden?

- 3 En partikel förflyttas under inverkan av kraftfältet $\mathbf{F}$ längs kurvan γ från punkten (1, 0) till punkten (-1, 0). Beräkna det arbete som därvid uträttas om

- (a) $\mathbf{F} = (x^3, x^2 + e^y)$ och γ är halva enhetscirkeln $y = \sqrt{1 - x^2}$.
 (b) $\mathbf{F} = (ye^{xy} + 1, xe^{xy})$ och γ är sinuskurvan $y = \sin(2\pi x)$.

- 4 (a) Antag att funktionen $f(x, y)$ är differentierbar. Ange en formel för att beräkna *riktningsderivatan* av f i en riktning som anges av enhetsvektorn $\mathbf{v}$, och förklara varför denna derivata blir maximal om $\mathbf{v}$ är riktad som gradienten av f .
 (b) Antag att vi vill bestämma maximum av funktionen $f(x, y)$ på ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1$. En metod innebär att man eliminerar en variabel ur ellipsens ekvation, vilket kan vara ganska besvärligt (beroende på hur $f(x, y)$ ser ut). Ett annat sätt är att betrakta ellipsens ekvation som ett *bivillkor* (*constraint*), och att använda Lagranges multiplikatormetod (eller liknande resonemang med determinanter). Beskriv kort hur detta går till, och förklara (gärna med stöd av en figur) den matematiska idén bakom detta.

- 5 (a) Vad menas med att ett vektorfält $\mathbf{F}$ är ett *gradientfält*, och vad är en *potential* till fältet?
 (b) Bevisa att varje vektorfält som är kontinuerligt och *konservativt* (*path-independent*) i ett öppet område R är ett gradientfält i R .

Var god vänd!

Uppgifter för komplettering av den löpande examinationen

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om du vill komplettera din poäng från detta moment, kan du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges för vem uppgiften är aktuell. T ex anger (< 12) att uppgiften gäller för dig vars poäng från den löpande examinationen är mindre än 12. Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas. Varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om du t ex har 11 poäng från tidigare examination och löser uppgift 7 helt korrekt, så kommer du trots detta bara upp i 12 poäng.

Fullständiga lösningar krävs även för dessa uppgifter.

- 6(<6) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ortogonalt.

Ange diagonalmatrisen D , den ortogonala matrisen P som diagonaliserar A , samt sambandet mellan dessa matriser.

- 7(<12) Vi återvänder till ön i uppgift 1. Koordinatsystemet antas vara orienterat så att x-axeln pekar österut, y-axeln norrut.

- (a) Om man återigen befinner sig på ön i punkten med koordinaterna $x = 50$, $y = 25$, kan man lokalt approximera bergssluttningen med ett plan som tangerar berget i punkten. Ställ upp en ekvation för detta plan. (Du behöver inte förenkla ekvationen, men det måste framgå hur punktens koordinater har använts).
- (b) Om man rör sig rakt *norrut* ifrån samma punkt, hur mycket lutar det? Använd *riktningsderivatan* av höjden för att beräkna lutningsvinkeln, och ange om det lutar uppför eller nedför!

- 8(<18) Densiteten i jordens atmosfär är en funktion

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-(r-a)/b}$$

där a är jordens radie (jorden betraktas här som ett perfekt klot), ρ_0 är densiteten vid jordytan (en konstant), b är en positiv konstant och $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ är avståndet till jordens centrum. Koordinatsystemet xyz har alltså sitt origo i jordens centrum. Om man vill beräkna massan av atmosfären upp till en viss höjd $r = R$, kan man beräkna trippelintegralen av densitetsfunktionen i det område som svarar mot $a \leq r \leq R$, för att få hela atmosfären kan man "approximera" $R \approx \infty$. Vad är atmosfärens massa, uttryckt i a , b och ρ_0 ?

Lycka till!
/LF

Svar till uppgifterna

1. (a) $\int_0^2 \left(\int_0^{y^2} f(x, y) dx \right) dy$
(b) $\frac{16}{3} + 8\pi$
2. (a) Största värdet: $h(25, 50) = 15,625$.
(b) Stranden nås i punkten $(62, 5; 0)$.
3. (a) Arbetet är 0.
(b) Arbetet är -2 .
6. $D = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $A = PDP^T$.
7. (a) Planet har ekvationen $z = 10^{-5} \cdot 2 \cdot 25^4 - 10^{-5} \cdot 25^3(x - 50) + 10^{-5} \cdot 2 \cdot 25^3(y - 25)$.
(b) Lutningsvinkeln är $\alpha \approx 17,35^\circ$ ($\tan \alpha = 0,3125$).
8. Massan är $4\pi\rho_0(a^2b + 2ab^2 + 2b^3)$.