

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Linjär algebra och flervariabelanalys del B för I1 (TMA315B) 2006-01-14

Skrivtid: 14.00-18.00

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare.

Telefon: Peter Lindroth, 076-272 18 60.

För godkänt krävs minst 25 poäng. Här ingår löpande examinationspoäng från vårterminen 2005.

Betyg 3: 25-31 poäng, betyg 4: 32-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Slutbetyg: addera resultaten från del A och del B, dubblera de ovan givna poängtal.

Besked om rättning och granskning av tentan ges på kursens hemsida:

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma315b/0405/

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

- 1 (a) Beräkna dubbelintegralen

$$\int_B y\sqrt{x^2+y^2}dA$$

där $B = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. (4p)

- (b) Beräkna trippelintegralen

$$\int_W \frac{x^2 y}{1+z} dV$$

där $W = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 1\}$. (4p)

- 2 Beräkna det största och det minsta värdet av $f(x, y) = x^2 y - 3xy + 2x - 4y$ på rektangelytan $R = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

Motivera först varför f har största och minsta värden på M ! (6p)

- 3 Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (y \sin x, \cos x)$ och C är kurvan $y = \sin x$ från $(0, 0)$ till $(\frac{\pi}{2}, 1)$, (3p)

(b) $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ och C är räta linjen från $(0, -3)$ till $(2, 3)$. (3p)

- 4 (a) Ange *Taylorpolynomet* av grad 2 för en funktion $f(x, y)$ kring en punkt (a, b) . (Resttermen behöver inte anges här). (2p)

(b) Låt K och K' vara ett område beskrivet i vanliga koordinater (x, y, z) respektive *sfäriska koordinater* (ρ, ϕ, θ) . Om

$$\int_K z dx dy dz = \int_{K'} g(\rho, \phi, \theta) d\rho d\phi d\theta,$$

vad är $g(\rho, \phi, \theta)$? (2p)

(c) Antag att K i uppgift (b) är det område som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ och $y \geq 0$. Ange motsvarande område K' i sfäriska koordinater. (2p)

- 5 (a) Formulera *kedjeregeln* för en sammansatt funktion $u(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. (Det är tillåtet att välja $n = 2$, $\mathbf{x} = (x, y)$). (2p)

(b) Bevisa kedjeregeln i den form du har valt i b)! (4p)

Var god vänd!

Uppgifter för komplettering av den löpande examinationen

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om du vill komplettera din poäng från detta moment, kan du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges för vem uppgiften är aktuell. T ex anger (< 12) att uppgiften gäller för dig vars poäng från den löpande examinationen är mindre än 12. Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas. Varje uppgift kan ge maximalt 6 poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om du t ex har 11 poäng från tidigare examination och löser uppgift 7 helt korrekt, så kommer du trots detta bara upp i 12 poäng.

Fullständiga lösningar krävs även för dessa uppgifter.

- 6**(<6) Visa att kurvan $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3$ är en ellips, och bestäm dess båda axelriktningar (ange riktningsvektorer eller ekvationer för axlarna) samt axlarnas längder. (6p)
- 7**(<12) Bestäm de stationära punkterna (=critical points) till $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$ och avgör deras karaktär. (6p)
- 8**(<18) Bestäm det största och det minsta värdet som $f(x, y) = xy^3$ antar på kurvan $x^4 + y^4 = 1$. (6p)

Lycka till!
/LF