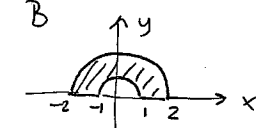
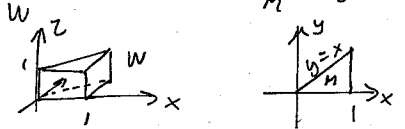


1) a) $\int_B y \sqrt{x^2 + y^2} dA = \int_{B'} r \sin \theta \cdot r \cdot r dA' = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_1^2 r^3 dr = \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{2}$



b) $\int_W \frac{x^2 y}{1+z} dV = \int_M \left(\int_0^1 \frac{x^2 y}{1+z} dz \right) dA = \int_M [x^2 y \ln(1+z)]_{z=0}^{z=1} dA = \int_M x^2 y \ln 2 dA = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 y \ln 2 dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \ln 2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2} \ln 2 dx = \left[\frac{x^5}{10} \ln 2 \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{10}$



2) $f(x, y) = x^2 y - 3xy + 2x - 4y$ är en kontinuerlig funktion
 $R = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ är en kompakt (sluten och begränsad) mängd

En sats garanterar då att $\max_R f$ och $\min_R f$ existerar.

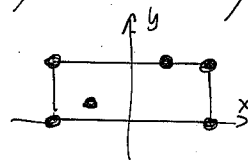
Vi letar extrempunkter:

I) I det inre av R . Då f är differentierbar, måste $\nabla f = (0, 0)$ i varje inre extrempunkt.

$\nabla f = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 2xy - 3y + 2 = 0 \\ f'_y = x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, -5y + 2 = 0 \\ \text{eller} \\ x = 4, 5y + 2 = 0 \end{cases}$

Vi hittar bara en stationär punkt: $f(-1, \frac{2}{5}) = -2$

2) (forts.) II) På randen av R . 4 sträckor att kolla:



x-axeln: $f(x, 0) = 2x, -2 \leq x \leq 2$

linjen $y = 2$: $f(x, 2) = 2x^2 - 4x - 8, -2 \leq x \leq 2$

linjen $x = -2$: $f(-2, y) = 6y - 4, 0 \leq y \leq 2$

linjen $x = 2$: $f(2, y) = -6y + 4, 0 \leq y \leq 2$

I de två fallen har vi en monoton funktion, som alltså antar min och max i respektive intervalls ändpunkter.

I fallet $y = 2$ har vi $\frac{d}{dx}(2x^2 - 4x - 8) = 4x - 4$, varmed en extrempunkt antas i $x = 1$ eller i ändpunkterna.

Vi samlar upp alla intressanta värden:

$f(-2, 0) = -4$ $f(2, 0) = 4$ $f(-2, 2) = 8$ $f(2, 2) = -8$
 $f(1, 2) = -10$

Vi jämför våra 6 fynd och får slutligen att

$\max_R f = 8$ och $\min_R f = -10$

3) a) $F = (y \sin x, \cos x)$ $C: \begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
 $\int_C F \cdot dr = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t, \cos t) \cdot (1, \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$

b) $F = (2xy, x^2 - y^2)$ $P'_y = Q'_x = 2x \Rightarrow$ gradientfält!

Vi söker en potential $\phi(x, y)$! $\phi'_x = P \Rightarrow \phi = x^2 y + h(y)$

Om $\phi'_y = x^2 - y^2$ ger detta $x^2 + h'(y) = x^2 - y^2 \Rightarrow h'(y) = -y^2$
 $h(y) = -y^3/3 + C$

$\phi(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3}$ Då är $\int_C F \cdot dr = \phi(2, 3) - \phi(0, 3) = 3 - 9 = -6$

$$6/ \quad 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 3 \Leftrightarrow [x \ y] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3$$

Vi vill bryta till en ON-bas av egenvektorer till A.

$$\text{Egenvärden?} \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

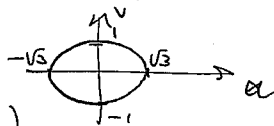
Jen ny ON-bas är definitionen för kurvan

$$\boxed{u^2 + 3v^2 = 3} \quad \text{vilket är en ellips, vars symmetriaxlar}$$

är de nya koordinataxlarna.

Vi ser också (särskilt $v=0$ resp $u=0$)

att axel-längderna är $2\sqrt{3}$ och 2.

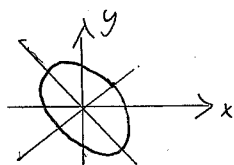


Vilka är då axelriktningarna? Jo, de nya basvektorena är ju egenvektorer för $\lambda_1 = 1$ respektive $\lambda_2 = 3$. Vi beräknar dessa:

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Axlarna har riktningsvektorena $(1, -1)$ (längs axeln) och $(1, 1)$ (kort axeln)



$$7/ \quad f(x, y) = x^3 - x^2y + 2y^2 \quad \text{LÖS } \nabla f = (0, 0)!$$

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2xy = 0 \\ f'_y = -x^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ -x^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, y=0 \\ \text{eller} \\ y=1, x^2=4 \end{cases}$$

Detta ger följande stationära punkter: $(0, 0), (2, 1), (-2, 1)$

7/ (f.o.s.) Ett sätt att avgöra karaktären hos de stationära punkterna är att undersöka den kvadratiska formen

$$f''_{xx} h^2 + 2f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2 \quad \begin{array}{l} \text{(positivt definit} \Rightarrow \text{lok. minimum} \\ \text{negativt} \Rightarrow \text{lok. maximum} \\ \text{indefinit} \Rightarrow \text{sadelpunkt} \end{array}$$

Detta kan också göras i 2 variabler enligt följande:

$$\text{Sätt } D = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 \quad \begin{array}{l} D > 0, f''_{xx} > 0 \Rightarrow \text{lok. minimum} \\ D > 0, f''_{xx} < 0 \Rightarrow \text{lok. maximum} \\ D < 0 \Rightarrow \text{sadelpunkt} \end{array}$$

$$\text{Väljer här det senare: } f''_{xx} = 2 - 2y, \quad f''_{yy} = 4, \quad f''_{xy} = -2x$$

Punkt	f''_{xx}	f''_{yy}	f''_{xy}	D	Slutsats
(0,0)	2	4	0	8	lokalt min.
(2,1)	0	4	-4	-16	sadelp.
(-2,1)	0	4	4	-16	sadelp.

Svar:

(0,0) är lokalt minimum

(2,1) och (-2,1) är sadelpunkter.

8/ $f(x, y) = xy^3$ är kontinuerlig, kurvan $g(x, y) = x^4 + y^4 = 1$ (K) utgör en kompakt mängd. $\max_K f$ och $\min_K f$ finns därmed!

Enligt teorin för optimering med bivillkor, måste ∇f och ∇g vara parallella i dessa extrempunkter. (K har ingen rand)

Detta villkor, tillsammans med bivillkoret, ger ett ekvationssystem som ger alla möjliga extrempunkter:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \\ g = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} y^3 & 3xy^2 \\ 4x^3 & 4y^3 \end{vmatrix} = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2(y^4 - 3x^4) = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Första ekvationen ger två fall: $y=0$ och $y^4=3x^4$

Sätt in i den andra ekvationen: $y=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$y^4=3x^4 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{4}, y^4 = \frac{3}{4}$ Jämför alla värden!

$$\begin{aligned} f(1,0) &= f(-1,0) = 0 & f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{3^{1/4}}{\sqrt[4]{2}}\right) &= f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{3^{1/4}}{\sqrt[4]{2}}\right) = +\frac{3^{3/4}}{4} = \frac{+27^{1/4}}{4} & \max f &= \frac{27^{1/4}}{4} \\ f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{3^{1/4}}{\sqrt[4]{2}}\right) &= f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{3^{1/4}}{\sqrt[4]{2}}\right) = -\frac{3^{3/4}}{4} = -\frac{27^{1/4}}{4} & \min f &= -\frac{27^{1/4}}{4} \end{aligned}$$