

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Linjär algebra och flervariabelanalys del B för I1 (TMA315B) 2006-08-23

Skrivtid: 08.30-12.30

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare.

Telefon: Jonatan Vasilis, 076-272 18 60.

För godkänt krävs minst 25 poäng.

Betyg 3: 25-31 poäng, betyg 4: 32-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Slutbetyg: addera resultaten från del A och del B, dubblera de ovan givna poängtal.

Besked om när tentan är rättad ges på kursens hemsida:

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma315b/0405/

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

Uppgift 5 kan ge upptill 8 poäng, övriga upptill 6 poäng.

-
- 1 (a) Funktionen $f(x, y) = x^2y^3 + (y - 1)^2$ har en enda kritisk (stationär) punkt. Hitta den och bestäm dess karaktär: lokalt maximum, lokalt minimum eller sadelpunkt.
(b) Bestäm en ekvation för *tangentplanet* i punkten med $x = 2$, $y = 1$ till funktionen i (a).
 - 2 (a) Avgör om den kvadratiske formen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ är positivt definit, negativt definit, indefinit eller semidefinit.
(b) Beräkna största och minsta värdena av den kvadratiske formen i (a) på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. (Här finns två helt olika metoder att välja mellan).
 - 3 Vilken definitions mängd har funktionen $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$? Efter att ha utrett detta, motivera varför f har ett största och ett minsta värde då $x \geq 0$ och $y \geq 0$, och beräkna dessa.
 - 4 (a) Skriv dubbelintegralen $\int_0^1 (\int_{2y}^2 f(x, y) dx) dy$ i omvänd integrationsordning.
Bra stöd: rita integrationsområdet först!
(b) Beräkna trippelintegralen $\int_K xyz^2 dV$, där K bestäms av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ och $0 \leq z \leq xy$.
 - 5 (a) En partikel, som påverkas av kraftfältet $\mathbf{F} = (x - 2y, xy)$ förflyttas från punkten $(0, 2)$ till punkten $(3, 0)$ längs en rät linje. Beräkna arbetet som uträttas.
(b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = (4x^3y^2 + 2xy^4, 2x^4y + 4x^2y^3 + 2y)$ är ett *gradientfält*, och utnyttja detta för att beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där C är enhetscirkeln genomlöst moturs från $(1, 0)$ till $(0, 1)$.
 - 6 Antag $f(x, y) = F(r, \theta)$, där f är differentierbar, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Bevisa att

$$\|\text{grad } f\|^2 = (F'_r)^2 + \frac{1}{r^2} (F'_\theta)^2$$

Var god vänd!

- 7 (a) Ange sambandet mellan vanliga koordinater (x, y, z) och *sfäriska koordinater* (ρ, ϕ, θ) .
Illustrera också med en figur, i vilken alla de inblandade koordinaterna för en punkt kan tolkas.
- (b) Låt K och K' vara ett område beskrivet i vanliga koordinater (x, y, z) respektive sfäriska koordinater (ρ, ϕ, θ) . Om

$$\int_K \frac{1}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz = \int_{K'} g(\rho, \phi, \theta) d\rho d\phi d\theta,$$

vad är $g(\rho, \phi, \theta)$?

- (c) Antag att K i uppgift (b) är det område som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$,
 $x \geq 0$ och $y \geq 0$.
Ange motsvarande område K' i sfäriska koordinater.

- 8 a) Vad menas med att en funktion av två variabler är *differentierbar* i en punkt?
- b) Betrakta funktionen f som ges av $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ i övriga punkter. Utred om f har partiella derivator i $(0, 0)$ och om den är differentierbar i $(0, 0)$.

Lycka till!
/LF