

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Linjär algebra och flervariabelanalys del B för I1 (TMA315B) 2007-01-20

Skrivtid: 14.00-18.00

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare.

Telefon: Tobias Gebäck, 076-272 18 60.

För godkänt krävs minst 25 poäng.

Betyg 3: 25-31 poäng, betyg 4: 32-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Slutbetyg: addera resultaten från del A och del B, dubblera de ovan givna poängtalerna.

Resultat meddelas via Ladok ca tre veckor efter tentamenstillfället.

1 Betrakta den kvadratiske formen $Q(x, y) = 2x^2 + 10xy + 2y^2$. (8p)

- (a) Vilken är den till $Q(x, y)$ associerade symmetriska matrisen A och hur ser sambandet mellan $Q(x, y)$ och A ut?
- (b) Vilka är egenvärdena till A ?
- (c) Klassificera $Q(x, y)$ (positivt/negativt definit/semidefinit, indefinit?).
- (d) Mellan vilka värden varierar $Q(x, y)$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$?

2 Betrakta funktionen (8p)

$$f(x, y) = \frac{1 + y^2}{1 + x^3}.$$

- (a) Beräkna riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(1, 1)$ där $\mathbf{v}$ är riktad från $(1, 1)$ mot punkten $(4, 5)$.
- (b) Skissera nivåkurvan $f(x, y) = 1$ och ange en tangentvektor till denna i punkten $(1, 1)$.
- (c) Bestäm en ekvation för tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, 1)$.

3 Bestäm det största och det minsta värde som funktionen
 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$ antar på halvcirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$. (6p)

4 Låt

$$\mathbf{F} = \left(x\sqrt{x^2 + y^2}, 1 + \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Beräkna med detta $\mathbf{F}$ kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ består av enhetscirkelbågen moturs från $(1, 0)$ till $(0, 1)$ följt av sträckan på y-axeln från $(0, 1)$ till $(0, 2)$. (6p)

5 Beräkna volymen av området som begränsas av ytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$. (6p)

6 Låt

$$f(x, y) = \frac{xy - x^3}{x^2 + y^2}$$

för $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Undersök om f är differentierbar i $(0, 0)$. (4p)

Var god vänd!

- 7** (a) Formulera *kedjeregeln* för en sammansatt funktion $u(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.
(Det är tillåtet att välja $n = 2$, $\mathbf{x} = (x, y)$). (2p)
- (b) Bevisa kedjeregeln i den form du har valt i b)! (4p)
- 8** (a) Vad menas med att ett vektorfält $\mathbf{F}$ är ett *gradientfält*, och vad är en *potential* till fältet? (2p)
- (b) Bevisa att varje vektorfält som är kontinuerligt och *konservativt* (engelska: *path-independent*) i ett öppet område R är ett gradientfält i R . (4p)

Lycka till!
/LF