

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Linjär algebra och flervariabelanalys del B för I1 (TMA315B) 2008-01-18

Skrivtid: 08.30-12.30

Hjälpmedel: Typgodkänd räknare.

Telefon: Ragnar Freij, 076-272 18 60.

För godkänt krävs minst 25 poäng.

Betyg 3: 25-31 poäng, betyg 4: 32-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Slutbetyg: addera resultaten från del A och del B, dubblera de ovan givna poängtal.

Resultat meddelas via Ladok senast ca tre veckor efter tentamenstillfället.

Granskning vid Matematiska Vetenskapers expedition, måndag-fredag kl 8.30-13.00.

-
- 1 Betrakta den kvadratiske formen $Q(x, y) = x^2 + 8xy + y^2$.
- (a) Ange den symmetriska matris A som representerar Q . (1p)
- (b) Klassificera Q : positivt/negativt definit, indefinit eller positivt/negativt semidefinit. (1p)
- (c) Ange en diagonalmatris D och en ortogonalmatris P sådana att $A = PDP^T$. (4p)

- 2 (a) Beräkna riktningsderivatan av funktionen $f(x, y, z) = xy + z^3$ i punkten $P = (-6, 3, 2)$ i riktning från P mot origo. (2p)
- (b) Beräkna riktningsderivatan av f i samma punkt P i den riktning där den är maximal. (2p)
- (c) Bestäm tangentplanet i P till den nivåytan för f som innehåller P . (2p)

- 3 Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$$

i området $\{(x, y) : 1 \leq x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ (6p)

- 4 (a) Beräkna dubbelintegralen $\int_T (2x^2 + 6xy) dA$, där T är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 2)$. (4p)
- (b) Beräkna dubbelintegralen

$$\int_E \frac{xe^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

där $E = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ (4p)

- 5 Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + xy, y^2 - xy)$ och C är
- (a) parabelbågen $y = x^2$ från $(0, 0)$ till $(1, 1)$. (3p)
- (b) kvadraten med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ och $(0, 1)$ genomlöst ett varv i positiv led. (3p)

- 6 Beräkna volymen av den gemensamma delen av två klot med radierna 1 och 2 och med avståndet 2 mellan medelpunkterna. (6p)

- 7 (a) Ange det gränsvärde som definierar $f'_x(2, 3)$, dvs *partiella derivatan* av en funktion $f(x, y)$ med avseende på x i punkten $(2, 3)$. (1p)
- (b) Hur definieras *gradienten* av en funktion $f(x, y)$? (1p)
- (c) Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är *differentierbar* i en punkt (a, b) ? (2p)
- (d) Blir funktionen $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, differentierbar i $(0, 0)$ om man sätter $f(0, 0) = 0$? Motivera! (2p)

- 8 (a) Vad menas med att ett vektorfält $\mathbf{F}$ är ett *gradientfält*, och vad är en *potential* till fältet? (2p)
- (b) Bevisa att varje vektorfält som är kontinuerligt och *konserverativt* (engelska: *path-independent*) i ett öppet område R är ett gradientfält i R . (4p)

Lycka till!
/LF