Kedjeregeln med bevis

Antag att $f(\mathbf{x})$ är en differentierbar funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^1$. Låt $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ i sin tur vara en deriverbar funktion från $\mathbb{R}^1$ till $\mathbb{R}^n$. Då är den sammansatta funktionen $u(t) = f(\mathbf{x}(t))$ deriverbar med derivatan

$$u'(t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) \tag{1}$$

Bevis:

Att f är differentierbar innebär att vi kan skriva, med $\mathbf{h} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)$,

$$u(t + \Delta t) - u(t) = f(\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}(t)) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{h} + E(\mathbf{h})$$

där

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{E(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \tag{2}$$

Ur detta beräknar vi differenskvoten för u:

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{\mathbf{h}}{\Delta t} + \frac{E(\mathbf{h})}{\Delta t}. \tag{3}$$

Eftersom nu

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{h}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \mathbf{x}'(t)$$

och på grund av (2) och att $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ då $\Delta t \to 0$ (ty $\mathbf{x}(t)$ är deriverbar, därmed kontinuerlig):

$$\frac{E(\mathbf{h})}{\Delta t} = \frac{E(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}\frac{\|\mathbf{h}\|}{\Delta t} = \pm\frac{E(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}\left\|\frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}\right\| \to \pm 0 \cdot \|\mathbf{x}'(t)\| = 0,$$

så följer (1) ur (3) då $\Delta t \to 0$.