Kedjeregeln med bevis (två variabler)

Antag att $f(x,y)$ är en differentierbar funktion. Låt $x = x(t)$ och $y = y(t)$ i sin tur vara deriverbara funktioner. Då är den sammansatta funktionen $u(t) = f(x(t), y(t))$ deriverbar med derivatan

$$u'(t) = f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t) \tag{1}$$

Man skriver ofta

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{dy}\frac{dy}{dt}$$

Bevis:

Att f är differentierbar innebär att vi kan skriva, med
$x = x(t),\ y = y(t)$ och $h = x(t+\Delta t) - x(t),\ k = y(t+\Delta t) - y(t)$:

$$u(t+\Delta t) - u(t) = f(x+h, y+k) - f(x,y) = f'_x(x,y)h + f'_y(x,y)k + E(h,k)$$

där

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{2}$$

Ur detta beräknar vi differenskvoten för u:

$$\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = f'_x(x,y)\frac{h}{\Delta t} + f'_y(x,y)\frac{k}{\Delta t} + \frac{E(h,k)}{\Delta t}. \tag{3}$$

Eftersom nu

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t),$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{k}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = y'(t)$$

och på grund av (2) och att $(h,k) \to (0,0)$ då $\Delta t \to 0$ (ty $x(t)$ och $y(t)$ är deriverbara, därmed kontinuerliga):

$$\frac{E(h,k)}{\Delta t} = \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\Delta t} = \pm\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\sqrt{\left(\frac{h}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{k}{\Delta t}\right)^2} \to \pm 0\cdot\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 0,$$

så följer (1) ur (3) då $\Delta t \to 0$.