MATEMATISKA INSTITUTIONEN
CTH&GU

TMA371 Partiella differentialekvationer TM, 1999-04-06
Telefon: Ola Helenius, ankn. 5310.
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Uppgifterna är värda 10 poäng vardera.

---

1. Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u'(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

a) Visa, med $||u|| = \Big(\int_0^1 u(x)^2\, dx \Big)^{1/2}$, att $||u||$ och $||u'||$ ej växer med tiden.
b) Visa att $||u'|| \to 0$, då $t \to \infty$.
c) Ge en fysikalisk tolkning av a) och b).

2. För en given funktion f, betrakta Laplace ekvationen

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{i } \Omega = \{(x,y) : 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\}, \\ u = 0, & \text{på } \partial\Omega, \end{cases}$$

a) Visa att $||D^2 u|| = ||\Delta u||$, dvs speciellt $||D^2 u|| \le ||f||$, där $(D^2u)^2 = u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2$.
b) Visa att samma resultat gäller om $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ på randen (istället för $u = 0$).
c) Visa i fallet med randvillkoret $u = 0$ att $||u|| \le C_\Omega ||\nabla u||$
(Poincare's olikhet).
Ledning: Tag en funktion ϕ sådan att $\Delta\phi = 1$ och utgå ifrån $\int_\Omega u^2 \Delta\phi\, dxdy$.

3. a) Formulera cG1 metoden för problemet

$$\begin{cases} (a(x)u'(x))' = 0, & 0 < x < 1, \\ a(0)u'(0) = u_0, \quad u(1) = 0, \end{cases}$$

och ange en *a posteriori* felluppskattning.
b) Beräkna den approximativa lösningen i a) då $u_0 = 3$ och $a(x) = 1/4$ för $x < 1/2$ och $a(x) = 1/2$ för $x > 1/2$, vid en likformig indelning av beräkningsområdet i 4 delintervall.
c) Visa utgående från a posteriori uppskattningen att, i detta speciella fall, den beräknade FE lösningen sammanfaller med den exakta lösningen dvs felet=0.

4. a) Beskriv cG1-cG1 för vågekvationen

$$\begin{cases} \ddot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u'(1,t) = g(t), & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

och ange resulterande ekvationssystemet i kompakt form.
b) Antag $g = 0$, visa att cG1-cG1 metoden konserverar energin.

5. Betrakta problemet

$$-div(\varepsilon \nabla u + \beta u) = f, \text{ i } \Omega, \quad u = 0, \text{ på } \partial\Omega,$$

där Ω är ett begränsat polygonområde, $\varepsilon > 0$ konstant $\beta = (\beta_1(x), \beta_2(x))$, och $f = f(x)$. Ange villkor (utgående från Lax-Milgrams sats) under vilka det givna problemet har en entydigt bestämd lösning, samt ange en stabilitetsuppskattning för u i termer av $||f||_{L_2(\Omega)}$, ε och $diam(\Omega)$, under dessa villkor.

MA