Matematik Chalmers

TMA371 Partiella differentialekvationer TM, 1998–08–29

Telefon: Fredrik Ekstedt, 772 5308
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Uppgifterna är värda 10 poäng vardera.

---

1. Ange feluppskattningarna för interpolationsfelet $v - \pi_h v$ och $\nabla(v - \pi_h v)$ i L_p-norm, $p = 2$ och $p = \infty$, med styckvis linjär interpolation med nätfunktion h i två rumsdimensioner. Bevisa motsvarande uppskattningar i fallet $p = \infty$ i en rumsdimension.

2. (a) Formulera cG(1)-metoden för randvärdesproblemet

$$-\Delta u = f,\ x \in \Omega; \quad u = 0,\ x \in \partial\Omega,$$

där $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

(b) Formulera och bevisa en a priori feluppskattning i energinorm.

(c) Formulera och bevisa en a posteriori feluppskattning i energinorm.

3. Ge en variationsformulering av randvärdesproblemet (med periodiska randvillkor)

$$\begin{aligned} -u''(x) + \alpha u(x) &= f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1),\ u'(0) &= u'(1), \end{aligned}$$

där α är en konstant och $f \in L_2(0,1)$. Visa att förutsättningarna i Lax-Milgrams lemma är uppfyllda under lämpligt villkor på α.

4. Betrakta begynnelse-randvärdesproblemet (med $\Omega \subset \mathbf{R}^2$)

$$\begin{aligned} &\dot{u} - \Delta u = f, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ &u = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

(a) Bevisa (med $\|u\| = (\int_\Omega u^2\,dx)^{1/2}$)

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2\,ds &\le \|u_0\|^2 + C\int_0^t \|f(s)\|^2\,ds, \\ \|\nabla u(t)\|^2 + \int_0^t \|\Delta u(s)\|^2\,ds &\le \|\nabla u_0\|^2 + C\int_0^t \|f(s)\|^2\,ds. \end{aligned}$$

(b) Formulera dG(0)-cG(1)-metoden för detta problem.

5. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -\epsilon u'' + a(x)u' + u &= f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0,\ u'(1) &= 0, \end{aligned}$$

där ϵ är en positiv konstant och funktionen a uppfyller $a(x) \ge 0$, $a'(x) \le 0$. Bevisa (med $\|u\| = (\int_0^1 u^2\,dx)^{1/2}$)

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon}\|u'\| &\le C\|f\|, \\ \|au'\| &\le C\|f\|, \\ \epsilon\|u''\| &\le C\|f\|. \end{aligned}$$

/stig