## Lösningar till tentan i Matematik D del A 97–01–16

---

1. (i) Påståendet är sant för $n = 1$, ty $1^3 = \left[\frac{1\cdot 2}{2}\right]^2$.

   (ii) Antag att påståendet är sant för $n = k$, d v s att $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2$. Vi visar att det då är sant för $n = k+1$, d v s att $1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3 = \left[\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4}\left[k^2 + 4(k+1)\right] =$$

$$\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

   Enligt (i), (ii) och induktionsprincipen är påståendet sant för alla $n \geq 1$.

2. Låt $P(n)$ vara påståendet att $A_n = 2^{n-1} + A_{n-2}$.

   (i) Påståendet är sant för $n = 2$ och $n = 3$, ty

$$A_2 = A_1 + 2A_0 = 1 + 2 \cdot 1 = 3 = 2^{2-1} + A_0,$$

$$A_3 = A_2 + 2A_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5 = 2^{3-1} + A_1.$$

   (ii) Antag att $P(k)$ och $P(k-1)$ är sanna för något $k \geq 3$, d v s att $A_k = 2^{k-1} + A_{k-2}$ och $A_{k-1} = 2^{k-2} + A_{k-3}$. Vi visar att då är även $P(k+1)$ sant, d v s att $A_{k+1} = 2^k + A_{k-1}$:

$$A_{k+1} = A_k + 2A_{k-1} = 2^{k-1} + A_{k-2} + 2(2^{k-2} + A_{k-3}) =$$

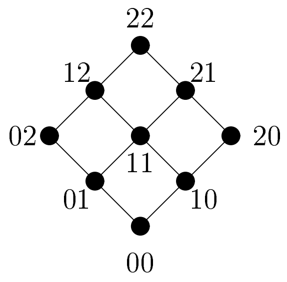
$$2^{k-1} + 2^{k-1} + (A_{k-2} + 2A_{k-3}) = 2^k + A_{k-1}.$$

   Enligt (i), (ii) och induktionsprincipen är påståendet sant för alla $n \geq 2$.

3. <u>$R$ är reflexiv:</u> Eftersom $a \leq a$ och $b \leq b$ har vi $(a,b)R(a,b)$ för alla $(a,b)$.

   <u>$R$ är transitiv:</u> Om $(a,b)R(c,d)$ och $(c,d)R(e,f)$, då har vi $a \leq c \leq e$ och $b \leq d \leq f$, så $a \leq e$ och $b \leq f$, d v s $(a,b)R(e,f)$.

   <u>$R$ är antisymmetrisk:</u> Om $(a,b)R(c,d)$ och $(c,d)R(a,b)$, då har vi $a \leq c$ och $c \leq a$, och likaledes $b \leq d$ och $d \leq b$, så $a = c$ och $b = d$, d v s $(a,b) = (c,d)$.




4. a) Låt $f(1) = g(1) = h(1) = 1$ och $f(2) = g(2) = h(2) = 2$. Då är $h(g(f(1))) = 1$ och $h(g(f(2))) = 2$, så $h \circ g \circ f$ är injektiv, oavsett hur $g$ och $h$ definieras iövrigt.

   b) Eftersom $C$ har tre element och $A$ bara två måste vi ha $h(x) = h(y)$ för två *olika* element i $C$. Men då är även $g(f(h(x))) = g(f(h(y)))$, så $g \circ f \circ h$ kan inte vara injektiv.

   c) Observera att $k : A \to A$. Därför är $k$ bijektiv om och endast om $k$ är injektiv (eftersom mängderna är ändliga). För att $k$ skall vara injektiv måste då $Y$ och $Z$ ha minst lika många element som $X$ (se argumentet i b)). I så fall kan vi kalla elementen i $X, Y, Z$ för $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$ respektive $z_1, \ldots, z_k$, där $n \leq m, k$. Om $f(x_i) = y_i$, $g(y_i) = z_i$ och $h(z_i) = x_i$ för $i = 1, 2, \ldots, n$, då blir $k$ bijektiv, oavsett hur $g$ och $h$ definieras iövrigt.

5. $S$ **är reflexiv:** $x + 2x = 3x \equiv 0 \pmod 3$ för varje $x$.

   $S$ **är symmetrisk:** Om $xSy$, då är $x + 2y = 3k$ för något heltal $k$, så $x = 3k - 2y$ och därmed har vi $y + 2x = y + 6k - 4y = 3(2k - y) \equiv 0 \pmod 3$, så $ySx$.

   $S$ **är transitiv:** Om $xSy$ och $ySz$, då är $x + 2y = 3k$ och $y + 2z = 3m$ för två heltal $k$ och $m$, så $2z = 3m - y$. Därmed har vi att $x + 2z = x + 3m - y = x + 2y + 3(m - y) \equiv x + 2y \equiv 0 \pmod 3$, så $xSz$.

   Ekvivalensklasserna är $\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$, $\{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$ och $\{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$, så det minsta positiva elementet i respektive klass är 3, 2, 1.

6. a)

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $(S \wedge C) \to T$ | **P** |
| (2) | $(S \wedge N) \to T$ | **P** |
| (3) | $\neg(S \wedge C) \vee T$ | 2 |
| (4) | $\neg S \vee \neg C \vee T$ | 3 |
| (5) | $\neg(S \wedge N) \vee T$ | 4 |
| (6) | $\neg S \vee \neg N \vee T$ | 5 |
| (7) | $[(T \vee \neg S) \vee \neg C] \wedge [(T \vee \neg S) \vee \neg N]$ | 4, 6 |
| (8) | $(T \vee \neg S) \vee (\neg C \wedge \neg N)$ | 7 |
| (9) | $[T \vee (\neg C \wedge \neg N)] \vee \neg S$ | 8 |
| (10) | $[T \vee \neg(C \vee N)] \vee \neg S$ | 9 |
| (11) | $\neg[T \vee \neg(C \vee N)] \to \neg S$ | 10 |
| (12) | $[\neg T \wedge (C \vee N)] \to \neg S$ | 11 |

   b) Låt $C, N, S, T$ vara följande påståenden:

   C: $G$ är cykelfri,
   N: $G$ har exakt $n - 1$ kanter,
   S: $G$ är sammanhängande,
   T: $G$ är ett träd.

   Då följer påståendet i b) av satsen i a).

7. Vi visar först att om $R$ är en partiell ordning (d v s $R$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv) då har $G$ ha en ögla på varje nod och inga andra cykler.

   Att $R$ är reflexiv medför att det måste finnas en riktad väg från varje nod $x$ till sig själv. Antingen måste då $x$ ha en ögla eller också finns det en cykel av längd minst 2 som innehåller $x$.

   Att $R$ är antisymmetrisk innebär att om $x$ och $y$ är två *olika* noder, då finns det inte riktade vägar både från $x$ til $y$ och från $y$ till $x$. Detta är uppfyllt om och endast om det finns inga cykler i grafen, förutom möjligtvis öglor.

   Alltså måste $G$ ha en ögla på varje nod och inga andra cykler.

   Omvänt, antag att $G$ har en ögla på varje nod och inga andra cykler. Om vi nu har $xRy$ och $yRx$, då finns det en väg från $x$ till $y$ och en från $y$ till $x$, alltså en cykel som börjar och slutar i $x$. Men, de enda cyklerna är öglor, så vi måste ha $x = y$. Alltså är $R$ antisymmetrisk.

   $R$ är reflexiv, för att det finns en riktad väg från $x$ till $x$ för varje $x$, nämligen öglan vid $x$.

   Att $R$ är transitiv är automatiskt uppfyllt, ty om det finns en riktad väg från $x$ till $y$ och en från $y$ till $z$, då finns det uppenbarligen en riktad väg från $x$ till $z$.