Lösningar till tentan i Matematik D del A — 961023

---

1. (i) Påståendet är sant för $n = 1$, ty $2 \cdot 3^{1-1} = 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2 = 3^1 - 1$.

(ii) Antag att påståendet är sant för $n = k$, d v s att $2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1} = 3^k - 1$. Vi visar att det då är sant för $n = k + 1$, d v s att $2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1} - 1$:

$$2+2\cdot 3+\cdots+2\cdot 3^{k-1}+2\cdot 3^k = (3^k-1)+2\cdot 3^k = 3^k(1+2)-1 = 3^k\cdot 3-1 = 3^{k+1}-1.$$

Enligt (i), (ii) och induktionsprincipen är påståendet sant för alla $n \geq 1$.

2. Låt $P(n)$ vara påståendet att $L_n = F_n + F_{n-2}$.

(i) Påståendet är sant för $n = 2$ och $n = 3$, ty

$$\begin{aligned} L_2 &= L_1 + L_0 = 1 + 2 = 3 = 2 + 1 = F_2 + F_0, \\ L_3 &= L_2 + L_1 = 3 + 1 = F_3 + F_1, \end{aligned}$$

(ii) Antag att $P(k-1)$ och $P(k-2)$ är sanna för något $k \geq 4$, d v s att $L_{k-1} = F_{k-1} + F_{k-3}$ och $L_{k-2} = F_{k-2} + F_{k-4}$. Vi visar att då är även $P(k)$ sann, d v s att $L_k = F_k + F_{k-2}$:

$$\begin{aligned} L_k &= L_{k-1} + L_{k-2} = (F_{k-1} + F_{k-3}) + (F_{k-2} + F_{k-4}) \\ &= (F_{k-1} + F_{k-2}) + (F_{k-3} + F_{k-4}) = F_k + F_{k-2}. \end{aligned}$$

Enligt (i), (ii) och induktionsprincipen är påståendet sant för alla $n \geq 2$.

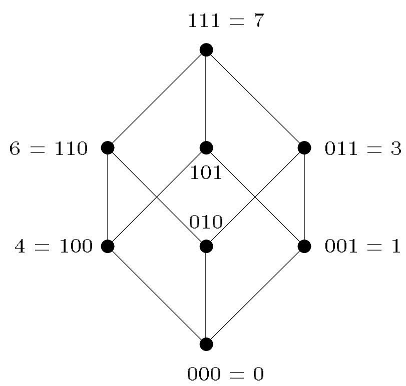
3. R **är reflexiv:** Varje komponent i a är en komponent i a, så aRa för alla naturliga tal a.

R **är transitiv:** Om varje komponent i a är en komponent i b och varje komponent i b är en komponent i c då är varje komponent i a en komponent i c, så aRc.

R **är antisymmetrisk:** Om varje komponent i a är en komponent i b och varje komponent i b är en komponent i a då måste a och b ha samma komponenter och således vara samma tal (båda är summan av samma komponenter).

Alltså är R en partiell ordning.

Observera att talen $0, 1, \ldots, 7$, skrivna binärt, motsvarar alla binära strängar av längd 3. En sträng a står i relationen R till strängen b om varje bit i a är mindre än eller lika med motsvarande bit i b.



4. a) Det finns ingen bijektiv funktion $f : A \to B$, för f:s värdemängd kan bara innehålla två element, d v s $f(1)$ och $f(2)$, men f:s målmängd har tre element. Alltså kan inte f vara surjektiv och därmed inte bijektiv.

Det finns ingen bijektiv funktion $g : B \to A$, för g:s definitionsmängd har tre element, men målmängden bara två, så det måste finnas två element i definitionsmängden som g skickar till samma element i målmängden. Alltså kan inte g vara injektiv och därmed inte bijektiv.

Det *finns* funktioner $h : A \to B$ och $k : B \to A$ så att $k \circ h : A \to A$ är bijektiv. Låt, exempelvis, $h(1) = 1$, $h(2) = 2$ och $k(1) = 1$, $k(2) = 2$, $k(3) = 2$. Då är $k(h(1)) = 1$ och $k(h(2)) = 2$, så $k \circ h$ är uppenbarligen både injektiv och surjektiv.

b) Slutsatsen blir att g inte är injektiv. Om $g \circ f$ inte är bijektiv, då kan inte både f och g vara bijektiva (detta är kontrapositivet till det inledande påståendet). Eftersom f skall vara bijektiv är då g inte bijektiv. Men, då g skall vara surjektiv, kan g inte vara injektiv.

5. Observera först att $(a, b)S(c, d) \iff ad = bc \iff \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (OK, ty vi har inga nollor).

S **är reflexiv:** $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$, så $(a, b)S(a, b)$ för alla (a, b).

S **är transitiv:** $(a, b)S(c, d)$ och $(c, d)S(e, f)$ medför $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ och $\frac{d}{c} = \frac{f}{e}$ så $\frac{b}{a} = \frac{f}{e}$ och därmed $(a, b)S(e, f)$.

S **är symmetrisk:** $(a, b)S(c, d) \iff \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \iff \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \iff (c, d)S(a, b)$.

Om $b/a = d/c$ då ligger (a, b) och (c, d) på samma linje genom origo, så varje ekvivalensklass består av en linje genom origo (fast origo är inte med). Varje sådan linje, utom koordinataxlarna, utgör en ekvivalensklass.

6. a) Argumentet visar att *om* det finns något y så att xRy gäller, *då* gäller också yRx och därmed också xRx. Felet är att vi inte kan utgå från att det finns något y för vilket xRy gäller. Alltså kan vi inte utgå från att xRy och yRx gäller, och därför inte att xRx gäller. Men xRx måste gälla för alla x för att R skall vara transitiv.

b) Om det för varje $x \in M$ finns ett $y \in M$ så att xSy gäller, då visar argumentet i a) att relationen även måste vara reflexiv och därmed en ekvivalensrelation.

7. a) Formeln $f(G) = n(G) - k(G) + o(G)$ definierar en funktion f, ty för varje graf G ger den ett tal. D v s, givet en plan graf är det entydigt bestämt hur många kanter och noder G har och även hur många ändliga områden G begränsar. Mängden av heltal kan uppenbarligen tjäna som målmängd, för $n(G)$, $k(G)$ och $o(G)$ är naturliga tal.

b) Funktionen f är inte injektiv. För den givna grafen har vi $f(G) = 4-7+4 = 1$. Om H är grafen som bara har en nod, då är $f(H) = n(H)-k(H)+o(H) = 1-0+0 = 1$. Alltså är $f(G) = f(H)$, så f är inte injektiv.

c) Faktum är, att om man kräver att graferna ifråga skall vara sammanhängande och att de skall ha minst en nod (d v s att man inte tillåter en "tom graf"), då består värdemängden till f enbart av talet 1! Talet $f(G)$ kallas *Euler-karaktäristiken* till G och den är alltså alltid lika med 1 för plana grafer. Detta kan visas med induktion. Nämligen, givet en plan graf G, om man avlägsnar en kant utan att G faller i två delar, då har man förlorat en kant och ett begränsat område och då kan man hänvisa till den induktiva hypotesen för att visa att f är konstant. Det är naturligtvis en del detaljer som måste tas om hand, och det nöjet vi vill inte förstöra för er!