MATEMATIK — Tentamen 97–01–16 kl. 14:15 – 18:15
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA — Telefonvakt: Robert Bohlin, ankn.: 5334
HJÄLPMEDEL: Ett eget dubbelsidigt A4, inga räknedosor

Matematik D del A — TMA551

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!

---

1. Visa att $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ för alla $n \geq 1$. (6)

2. Talföljden A_n definieras så här: (6)

$$A_0 = A_1 = 1, \qquad A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2} \text{ för } n \geq 2.$$

Visa att $A_n = 2^{n-1} + A_{n-2}$ för alla $n \geq 2$.

3. Låt M_n vara mängden av alla ordnade par (a, b) av heltal så att (7)

$$0 \leq a \leq n \quad \text{och} \quad 0 \leq b \leq n.$$

Då har vi, exempelvis, $M_1 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Definiera relationen R på M_n genom

$$(a, b)R(c, d) \iff a \leq c \text{ och } b \leq d.$$

a) Visa att R är en partiell ordning.

b) Rita Hassediagrammet i fallet $n = 2$.

4. Låt $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ och $C = \{1, 2, 3\}$.

a) Finns det funktioner $f : A \to B$, $g : B \to C$ och $h : C \to A$ så att $h \circ g \circ f$ är injektiv? Motivera (ge exempel, om svaret är ja). (2)

b) Finns det funktioner $f : A \to B$, $g : B \to C$ och $h : C \to A$ så att $g \circ f \circ h$ är injektiv? Motivera (ge exempel, om svaret är ja). (2)

c) Låt X, Y, Z vara ändliga mängder, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ och $h : Z \to X$. Låt $k = h \circ g \circ f$. Vad kan man säga om förhållandet mellan antal element i X respektive Y respektive Z om k är bijektiv? (2)

Vänd!

5. Definiera relationen S på mängden av alla heltal genom att sätta (7)

$$xSy \iff x + 2y \equiv 0 \pmod 3,$$

det vill säga xSy om och endast om $x + 2y = 3k$ för något heltal k. Visa att S är en ekvivalensrelation och ange det minsta positiva elementet i varje ekvivalensklass.

6. a) Visa att $(\neg T \wedge (C \vee N)) \to \neg S$ följer av de två premisserna $(S \wedge C) \to T$ och $(S \wedge N) \to T$. (3)

   b) Om G är en graf med n noder då gäller följande: (3)

      i) Om G är sammanhängande och cykelfri, då är G ett träd.

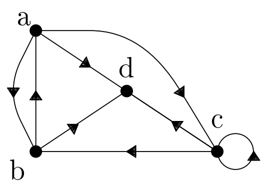
      ii) Om G är sammanhängande och har exakt $n - 1$ kanter, då är G ett träd.

   Låt G vara en graf med n noder, som inte är ett träd. Antag vidare att G är antingen cykelfri eller har exakt $n - 1$ kanter. Visa att G inte är sammanhängande.

7. En *riktad graf* är en graf där varje kant har en riktning, d v s en kant mellan noderna a och b går antingen *från a till b* eller *från b till a*. En nod a kan ha en *ögla*, d v s en kant som går från a till a, och det kan också finnas kanter åt båda hållen mellan två noder. (6)

En *väg* i en riktad graf G är en följd $x_1, x_2, \ldots, x_n$ av noder i G, så att varje par (x_i, x_{i+1}) är en kant i G (från x_i till x_{i+1}). En *cykel* i en riktad graf är en väg som börjar och slutar i samma nod.

Här till höger visas ett exempel på en riktad graf. Ett exempel på en väg i denna graf är a, c, c, b, d. Vägen a, c, b, a är en cykel. Även c, c är en cykel.



Informellt kan man säga att en väg i en riktad graf är ett sätt att gå från en nod till en annan (möjligtvis samma nod) längs kanter, så att man alltid går i pilarnas riktning.

Låt G vara en riktad graf. Definiera relationen V på mängden av noder i G genom

$$xVy \iff \text{det finns en riktad väg från } x \text{ till } y.$$

Visa att V är en partiell ordning om och endast om G uppfyller följande två villkor:

a) Varje nod i G har en ögla.

b) G har inga andra cykler än öglorna på varje nod.

Lycka till! — Einar