MATEMATIK — Tentamen 96–10–23 kl. 8:45 – 12:45

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA — Telefonvakt: Samuel Bengmark, ankn.: 5302

HJÄLPMEDEL: Eget formelblad (dubbelsidigt A4), inga räknedosor

Matematik D1 del A — TMA551

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!

---

1. Visa att $2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$ för alla $n \geq 1$. (Obs: $3^0 = 1$.) (6)

2. Fibonaccitalen, F_n, respektive Lucastalen, L_n, definieras så här: (6)

   $F_0 = F_1 = 1$, $\qquad$ $L_0 = 2,\ L_1 = 1$,

   $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ för $n \geq 2$. $\qquad$ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, för $n \geq 2$.

   Visa att $L_n = F_n + F_{n-2}$ för alla $n \geq 2$.

3. Varje naturligt tal n kan skrivas på ett och endast ett sätt som summan av olika heltalspotenser av 2 (för $n = 0$ blir det en tom summa). Kalla dessa potenser av 2 för *komponenterna* i n. T ex har vi $19 = 16 + 2 + 1 = 2^4 + 2^1 + 2^0$, så 19 har komponenterna $2^4, 2^1$ och 2^0. (7)

   Låt M vara en mängd av naturliga tal och definiera relationen R på M genom

   $$aRb \iff \text{varje komponent i } a \text{ är en komponent i } b.$$

   a) Visa att R är en partiell ordning.

   b) Rita Hassediagrammet i fallet $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
   (Observera att 0 har inga komponenter, så $0Rx$ för alla $x \in M$.)

4. a) Låt $A = \{1, 2\}$ och $B = \{1, 2, 3\}$. (4)

   – Finns det en bijektiv funktion $f : A \to B$? Motivera.
   – Finns det en bijektiv funktion $g : B \to A$? Motivera.
   – Finns det funktioner $h : A \to B$ och $k : B \to A$ så att $k \circ h$ är bijektiv? Ange i så fall sådana funktioner.

   b) Om $f : X \to Y$ och $g : Y \to Z$ är två *bijektiva* funktioner, då följer det att även $g \circ f$ är bijektiv. (2)

   Antag att $f : X \to Y$ och $g : Y \to Z$ är funktioner, att $g \circ f$ *inte* är bijektiv, att f är bijektiv och att g är surjektiv. Vilken slutsats kan man då dra om g? Motivera.

Vänd!

5. Låt $\mathbb{R}^*$ vara mängden av alla reella tal utom 0. Definiera relationen $\sim$ på mängden $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ genom (7)

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation.

b) Beskriv ekvivalensklasserna (som delmängder i planet $\mathbb{R}^2$).

6. a) Vad är det som är fel i följande bevis? (4)

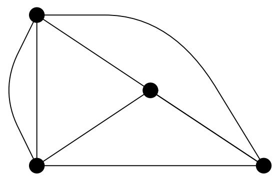
Sats: En relation R som är symmetrisk och transitiv är också reflexiv.

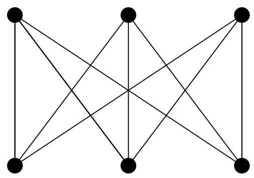
Bevis: Antag att xRy gäller. Då har vi även yRx, ty R är symmetrisk. På grund av transitiviteten medför xRy och yRx tillsammans att xRx, d v s att R är reflexiv. $\square$

Om du inte kan hitta felet fås två poäng för att hitta ett motexempel till påståendet i satsen. (Om du hittar ett motexempel kanske du skall titta på påståendet igen och se varför det inte håller för ditt exempel.)

b) Låt S vara en relation på en mängd M så att S är symmetrisk och transitiv och sådan att det för varje $x \in M$ finns ett $y \in M$ så att xSy gäller. Måste S vara en ekvivalensrelation? Motivera. (2)

7. En *plan graf* är en graf (med noder och kanter) som är ritad i ett plan utan att några kanter korsar varandra. Grafen här nedan till vänster är en plan graf, men den till höger är inte plan.





Givet en plan graf G, låt $n(G)$ vara antalet noder i G, $k(G)$ antalet kanter i G och $o(G)$ antalet *ändliga* områden som begränsas av G. (I exemplet ovan till vänster är $o(G) = 4$.)

a) Förklara i ord varför formeln $f(G) = n(G) - k(G) + o(G)$ definierar en funktion f och ange en målmängd för f. (2)

b) Är f injektiv? Motivera svaret! (4)

c) (Bonusproblem). Bestäm värdemängden till f.

Lycka till! — Samuel, Kicki, Stefan, Åke och Einar