Lösningar, tentamen i Matematik D, del A 981021

1. Beviset är med total induktion över n.

   Basfall: För $n = 0$ och $n = 1$ blir högerleden i påståendet $2^0 + (-1)^0 = 2$ respektive $2^1 + (-1)^1 = 1$, vilket överensstämmer med definitionen av T_n för dessa n.

   Induktionssteget: Välj $n > 1$ godtyckligt och antag att $T_k = 2^k + (-1)^k$ för alla $k < n$. Vi måste visa att $T_n = 2^n + (-1)^n$. Vi får

$$
\begin{array}{ll}
T_n = & \{\text{definitionen av } T_n\} \\
T_{n-1} + 2 \cdot T_{n-2} = & \{\text{ind.ant. för } k = n-1 \text{ och } k = n-2\} \\
2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2 \cdot (2^{n-2} + (-1)^{n-2}) = & \\
2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + (-1)^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-2} = & \\
2^n + (-1)^{n-2} \cdot (-1 + 2) = & \{\text{ty } (-1)^{n-2} = (-1)^n\} \\
2^n + (-1)^n. &
\end{array}
$$

   Därmed är beviset klart.

2.

$$
\begin{array}{ll}
A \vee \neg B & (p1) \\
A \Rightarrow C & (p2) \\
\hline
B \Rightarrow C &
\end{array}
$$

Antag premisserna. Vi visar slutsatsen med introduktion, så vi antar B $(h1)$ och måste härleda C. Vi gör fallanalys över $(p1)$:

- Antag A. Tillsammans med $(p2)$ ger detta C med modus ponens.
- Antag $\neg B$. Tillsammans med $(h1)$ ger detta motsägelse och vi kan dra slutsatsen C.

Därmed är härledningen klar.

Eftersom vi har ovanstående härledning så kan vi dra slutsatsen att $(A \vee \neg B) \wedge (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ måste vara en tautologi.

3. Antag att f är additiv. Vi visar att $f(n) = n \cdot f(1)$ för alla n med induktion över n.

   Basfallet: Vi måste visa $f(0) = 0$. Vi kan välja $m = n = 0$ i definitionen av att f är additiv, vilket ger att $f(0) = f(0) + f(0)$, vilket medför att $f(0) = 0$.

INDUKTIONSSTEGET: Välj n godtyckligt och antag att $f(n) = n \cdot f(1)$. Vi måste visa att $f(n+1) = (n+1) \cdot f(1)$. Men

$$\begin{array}{ll} f(n+1) = & \{\text{ty } f \text{ är additiv}\} \\ f(n) + f(1) = & \{\text{enligt induktionsantagandet}\} \\ n \cdot f(1) + f(1) = & \\ (n+1) \cdot f(1). & \end{array}$$

4. Vi visar implikationen åt bägge hållen.

$a' + b = \mathbb{I} \Rightarrow a = a \cdot b$. Antag $a' + b = \mathbb{I}$. Vi har då

$$\begin{array}{ll} a = & \{\text{Enhet}\} \\ a \cdot \mathbb{I} = & \{\text{antagandet}\} \\ a \cdot (a' + b) = & \{\text{Distributivitet}\} \\ a \cdot a' + a \cdot b = & \{\text{Komplement}\} \\ \mathbb{O} + a \cdot b = & \{\text{Enhet}\} \\ a \cdot b. & \end{array}$$

$a = a \cdot b \Rightarrow a' + b = \mathbb{I}$. Antag $a = a \cdot b$. Vi har då

$$\begin{array}{ll} a' + b = & \{\text{antagandet}\} \\ (a \cdot b)' + b = & \{\text{de Morgan}\} \\ (a' + b') + b = & \{\text{Associativitet och Komplement}\} \\ a' + \mathbb{I} = & \{\text{Absorption}\} \\ \mathbb{I}. & \end{array}$$

5. (a) Beviset är med induktion över n.

BASFALLET ($n = 1$): Vi måste visa att $\mathsf{Fer}_1 = \mathsf{Fer}_0 + 2$, vilket följer direkt av definitionen.

INDUKTIONSSTEGET: Välj $n \geq 1$ godtyckligt och antag

$$\mathsf{Fer}_n = \mathsf{Fer}_0 \cdot \mathsf{Fer}_1 \cdot \mathsf{Fer}_2 \cdot \ldots \cdot \mathsf{Fer}_{n-1} + 2.$$

Vi får då

$$\begin{array}{ll} \mathsf{Fer}_0 \cdot \mathsf{Fer}_1 \cdot \mathsf{Fer}_2 \cdot \ldots \cdot \mathsf{Fer}_{n-1} \cdot \mathsf{Fer}_n + 2 = & \{\text{induktionsantagandet}\} \\ (\mathsf{Fer}_n - 2) \cdot \mathsf{Fer}_n + 2 = & \{\text{definitionen av } \mathsf{Fer}_n\} \\ (2^{2^n} - 1) \cdot (2^{2^n} + 1) + 2 = & \{\text{konjugatregeln}\} \\ (2^{2^n})^2 - 1 + 2 = & \\ \mathsf{Fer}_{n+1}. & \end{array}$$

(b) Vi har enligt (a) att (ty $m \geq 1$)

$$\mathsf{Fer}_m \bmod \mathsf{Fer}_n = (\mathsf{Fer}_0 \cdot \mathsf{Fer}_1 \cdot \ldots \cdot \mathsf{Fer}_{m-1} + 2) \bmod \mathsf{Fer}_n.$$

Eftersom $m > n$ är Fer_n en faktor i produkten i högerledet. Vidare är $\mathsf{Fer}_n \geq 3$, och därför följer att $\mathsf{Fer}_m \bmod \mathsf{Fer}_n = 2$. Detta ger

$$
\begin{array}{ll}
\mathsf{gcd}(\mathsf{Fer}_m, \mathsf{Fer}_n) = & \{\mathsf{Fer}_m > \mathsf{Fer}_n \text{ eftersom } m > n\} \\
\mathsf{gcd}(\mathsf{Fer}_n, \mathsf{Fer}_m \bmod \mathsf{Fer}_n) = & \{\text{enligt ovan}\} \\
\mathsf{gcd}(\mathsf{Fer}_n, 2) = & \\
\mathsf{gcd}(2, \mathsf{Fer}_n \bmod 2) = & \{\text{enligt def av } \mathsf{Fer}_n\} \\
\mathsf{gcd}(2, 1) = \mathsf{propergcd}(1, 0) = 1. &
\end{array}
$$

6. (a) Vi kan som exempel välja $\mathsf{R} \triangleq \{(\mathsf{a}, \mathsf{a})\}$. Denna är inte reflexiv eftersom $(\mathsf{b}, \mathsf{b}) \notin \mathsf{R}$, men heller inte irreflexiv eftersom $(\mathsf{a}, \mathsf{a}) \in \mathsf{R}$.

   (b) Välj $a, b \in B$ godtyckligt. Vi visar att $(a, b) \in (R \circ S)^{-1}$ omm $(a, b) \in S^{-1} \circ R^{-1}$:

$$
\begin{array}{ll}
(a, b) \in (R \circ S)^{-1} \text{ omm} & \{\text{def av invers relation}\} \\
(b, a) \in R \circ S \text{ omm} & \{\text{definition av } \circ\} \\
\exists c \in B.(b, c) \in R \land (c, a) \in S \text{ omm} & \{\text{def av invers relation}\} \\
\exists c \in B.(c, b) \in R^{-1} \land (a, c) \in S^{-1} \text{ omm} & \{\text{definition av } \circ\} \\
(a, b) \in S^{-1} \circ R^{-1}. &
\end{array}
$$

7. (a) $\sim$ är en ekvivalensrelation, ty

   - $\sim$ är reflexiv:
     Välj $a \in A$ godtyckligt. Då har vi $a \sqsubseteq a$, eftersom $\sqsubseteq$ är reflexiv och därmed att $a \sim a$.
   - $\sim$ är symmetrisk:
     $a \sim b$ och $b \sim a$ bestäms av samma predikat, så när som på ordningen mellan $a \sqsubseteq b$ och $b \sqsubseteq a$. Detta innebär direkt att om $a \sim b$, så $b \sim a$.
   - $\sim$ är transitiv:
     Välj $a, b, c \in A$ godtyckligt.
     Antag $a \sim b$, dvs $a \sqsubseteq b$ och $b \sqsubseteq a$
     och $b \sim c$, dvs $b \sqsubseteq c$ och $c \sqsubseteq b$.

     Transitiviteten hos $\sqsubseteq$ ger då $a \sqsubseteq c$ och $c \sqsubseteq a$, dvs $a \sim c$.

   (b) Vi måste visa att definitionen av $\sqsubseteq'$ inte beror av valet av representanter för ekvivalensklasserna. Välj därför $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ godtyckliga så att $a_1 \sim a_2$ och $b_1 \sim b_2$ Vi måste visa att $a_1 \sqsubseteq b_1$ omm $a_2 \sqsubseteq b_2$.

   Antag därför $a_1 \sqsubseteq b_1$. Vi får då att

$$
\begin{array}{ll}
a_2 \sqsubseteq & \{\text{eftersom } a_1 \sim a_2\} \\
a_1 \sqsubseteq & \{\text{eftersom } a_1 \sqsubseteq b_1\} \\
b_1 \sqsubseteq & \{\text{eftersom } b_1 \sim b_2\} \\
b_2, &
\end{array}
$$

dvs (eftersom $\sqsubseteq$ är transitiv) $\mathfrak{a}_2 \sqsubseteq \mathfrak{b}_2$.

Beviset i andra riktningen är analogt.