Uppgifter del 1: Inledning

Syftet med dessa övningar är att bekanta sig med grundläggande begrepp, metoder och tillämpningar av linjär algebra och med den linjära algebrans samband med geometriska strukturer i planet och rummet. I synnerhet förväntas ni lära er om sambandet mellan matrisalgebran, matrisers verkan på planet och rummet, och linjära ekvationssystem. Huvudrollen innehas, i första akten, av determinanten till en matris. Denna gör dock inte entré förrän efter ett tag och kommer egentligen smygande bakifrån.

Vi kommer att lägga ned mycket tid på att studera 2×2 matriser som *avbildningar*, d v s hur sådana matriser verkar geometriskt på planet. Genom detta hoppas vi att ni skall utveckla en känsla för linjär algebra i två dimensioner och kunna generalisera dessa kunskaper till högre dimensioner.

Antag att vi vill skriva ett program som ritar en (analog) klocka på en datorskärm och uppdaterar den var 15:e sekund. När vi väl har bestämt hur visarna skall se ut är det bara att flytta dem var 15:e sekund från ett ställe till ett annat. Om vi har en "bild" på varje visare i form av en mängd punkter i planet (på koordinatform), då gäller det att flytta varje sådan punkt på så sätt att visaren ser ut att rotera runt klockans mittpunkt. Hur skall man göra? Det borde väl finnas någon funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (d v s från planet till planet) som åstadkommer detta. Frågan är bara hur vi skall lista ut vad detta är för funktion, och hur vi skall representera funktionen på en lämplig form som dels gör den lätt att förstå, dels gör den lätt att tillämpa i ett datorprogram.

För att ta ett annat exempel kan man tänka sig att man vill ta en bild (t ex ett skannat foto) av en människa och göra henne smalare och längre eller bredare och kortare som i en skrattspegel.

Eller också vill man visa tredimensionella ritningar av ett hus, eller en interiör, från olika synvinklar. Eller vill man kunna visa hur stjärnhimlen (där varje stjärna är lagrad som en punkt i tre dimensioner på koordinatform) ser ut från en godtycklig plats på Mars, vid en godtycklig tidpunkt.

Allt detta, och mycket annat, kan man enkelt göra med hjälp av matriser. Dessutom förekommer linjär algebra i snart sagt varje gren inom matematiken, inte minst när det gäller olika slags tillämpad matematik.

Så här multipliceras två 2×2 matriser, respektive en sådan matris och en vektor (punkt) i två dimensioner:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Det är viktigt att räkna med matriser för hand tills ni har fått en känsla för hur det går till. Sedan kan ni med fördel använda MATLAB för att underlätta. Se anvisningar på kursens hemsida.

I slutet av detta häfte finns hemuppgifter (med facit på kursens hemsida) Många av övningarna i häftet borde ni också kunna göra hemma.

A Avbildningar

Låt A, B, C, D, E, F vara följande matriser. Dessa matriser kommer vi att referera till då och då i hela detta övningshäfte.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}} \quad \underset{C}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}} \quad \underset{D}{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}} \quad \underset{E}{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}} \quad \underset{F}{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

1. Räkna ut hur ovanstående matriser verkar på punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. D v s bestäm $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ och $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, och samma för B, C, D, E, F.

   Rita, för varje matris, en bild av planet som visar vart dessa punkter skickas av matrisen.

2. Låt $\mathcal{R}$ vara rektangeln vars hörn är punkterna i föregående uppgift. Om M är en matris, skriv då $M(\mathcal{R})$ för den geometriska figur som bildas av de punkter man får genom att låta matrisen M *verka på* hörnen i $\mathcal{R}$. Denna figur kallar man *bilden av* $\mathcal{R}$ *under* M*:s verkan*. Vad som menas med "den geometriska figur som bildas..." definierar vi inte rigoröst här, men hoppas att alla är överens (med mig!) om detta. I annat fall får ni fråga.

   Vad har $A(\mathcal{R}), B(\mathcal{R})$, etc. för form?

   M kan betraktas som en funktion $f_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Då är $\mathcal{R}$ en delmängd i M:s definitionsmängd, och ni har väl inte glömt Del A redan?

3. Man kan dela upp matriserna A, B, C, D, E, F i två grupper beroende på hur de verkar på $\mathcal{R}$. Varför blir det olika bilder för de två olika grupperna av matriser? Kan ni gissa det? D v s, kan ni hitta någon gemensam egenskap som den första gruppen har men inte den andra? Om ni kan det, kan ni bevisa att så är fallet? Tänk gärna lite grann på hur man skulle kunna bevisa detta, men lägg inte ned mycket tid på det nu. Vi återkommer.

4. Undersök hur matriserna ifråga verkar på punkterna $(1,2)$, $(2,4)$, $(5,10)$. Vad är det som händer? Varför händer detta? Är punkterna "slumpmässigt" valda?

5. Titta nu på vad matriserna gör med punkten $(2,5)$. Nu uppstår det plötsligt skillnader i hur de olika matriserna verkar, om man tittar på den nya punkten tillsammans med de tre första punkterna. Kan ni se något samband med hur matriserna verkade på $\mathcal{R}$?

B Linearitet

1. Visa att matrisen A ovan *avbildar* varje linje genom origo på någon linje genom origo. M a o, att given en linje ℓ genom origo finns det en linje m genom origo så att varje punkt på ℓ skickas av A till en punkt på m. Om man ser A som en funktion $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ då är $f_A(\ell) \subseteq m$.
   Ledning: Om (x, y) och (z, w) ligger på samma linje genom origo, då kan man skriva (z, w) med hjälp av (x, y) (förutsatt att $(x, y) \neq (0, 0)$).

2. Försök visa att vilken matris som helst avbildar en linje genom origo på en linje genom origo.

Själva beviset här är mycket enkelt. Det svåra är att förstå vad det är man skall bevisa och att översätta det till ett matematiskt språk som lämpar sig för ett bevis.

3. Visa också att $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = M\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right]$.

   Vad ni har visat i denna och föregående uppgift är att en matris M (sedd som en funktion $f_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) är en *linjär avbildning*.

4.* Vad gör A med en rät linje som *inte* går genom origo? Kolla ett par exempel och försök visa detta för en godtycklig matris M.

Uppgifter markerade med stjärna bör göras endast om ni hinner

5.* Skulle man kunna utföra föregående bevis på följande sätt?: Flytta en linje som inte går genom origo så att den går genom origo, hänvisa till fallet med en linje genom origo och flytta sedan tillbaka.

6.* Om ni har lyckats abstrahera skillnaden mellan matriserna A, B, C respektive D, E, F ovan, försök då visa att bilden av varje linje (genom origo?) är en linje under verkan av varje matris av samma "typ" som A, B, C, men inte under verkan av en matris av samma typ som D, E, F.

C **Area**

1. Vad är arean av rektangeln $\mathcal{R}$ i uppgift A–2? Vad är arean av figuren $B(\mathcal{R})$? $E(\mathcal{R})$?

2. Bestäm arean av $H(\mathcal{R})$ när $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ respektive $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Låt $M = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Blir arean $M(\mathcal{R})$ stor eller liten jämfört med areorna i uppgift 1 (gissa först, räkna sen)? Hur blir det med $M = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

4. Låt $K = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Bestäm arean av $K(\mathcal{R})$. Här gäller det att hitta någon lämplig uppdelning av figuren så att man kan räkna arean av ett antal trianglar och andra figurer. Be om hjälp om ni inte kan hitta en bra uppdelning.

5. Kan ni se något samband mellan denna area och talen i matrisen K?

6. Låt $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vad händer med $M(\mathcal{R})$ och dess area när a går från att vara ett positivt tal till att bli 0 och sedan till att bli negativt? Gör om för $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ när a närmar sig 6.

7. Låt $\mathcal{S}$ vara parallellogrammet som spänns upp av vektorerna $(3, 0)$ och $(0, 3)$. Bestäm arean av $\mathcal{S}$. Vad tror ni arean av $A(\mathcal{S})$ är? Vad är den? Vad är arean av $F(\mathcal{S})$?

$\mathcal{S}$ har hörnen $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$ och $(3, 3)$.

8.* Gör om uppgifter 4 och 5 för matrisen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Antag att $M(\mathcal{R})$ ser ut ungefär som $K(\mathcal{R})$, d v s försök inte göra detta för en godtycklig matris, för då måste ni behandla många olika fall (en utmärkt sysselsättning för en fredagkväll). Ni kan t ex utgå från att $0 < b < c < a < d$.

Detta kan göras genom att byta ut $4, 1, 3, 5$ mot a, b, c, d.

9.* Fredagkväll: Lista ut alla olika fall som måste behandlas och utred saken i varje enskilt fall.

10.* Låt $\mathcal{P}$ vara ett parallellogram med area a. Hur stor är arean av $M(\mathcal{P})$? Ledning: Om $\mathcal{P} = \mathcal{R}$ då vet vi svaret. Försök dela upp detta i två steg så att man kan nöja sig med att räkna arean av $N(\mathcal{R})$ för någon matris N.

11.* Om ni har lyckats lösa föregående uppgift, då har ni kanske kommit fram till att $M(\mathcal{R})$ har negativ area om $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Det låter inte bra (fast möjligtvis intressant). Vad göra? Säg något vettigt om detta. Kolla tex vad som händer med inbördes ordningen av hörnen i $\mathcal{R}$ när M verkar på $\mathcal{R}$ (vad menas med inbördes ordning?).

Vadå negativ area? Är detta matte eller science fiction?

Försök inte smussla undan minustecknet när ingen tittar!

12.* Med A som i avsnitt A blir $A(\mathcal{R})$ ett parallellogram. Om $\mathcal{P}$ är ett parallellogram, vad blir då $A(\mathcal{P})$? Ett parallellogram. Kolla några exempel om ni är skeptiska. Försök bevisa detta (eller hitta motexempel, om ni är väldigt skeptiska). Om vi antar detta då borde $B(A(\mathcal{R}))$ vara ett parallellogram, eller hur? Och även $B(A(\mathcal{P}))$?

Vad är det egentligen man behöver visa här? M a o, vad är den enklaste sats man kan tänka sig som har detta som uppenbar följd?

D Inverser

1. $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ är en punkt i planet. $B\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ är en punkt i planet om (z, w) är det. Alltså borde $B \cdot \left[A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$ vara en punkt i planet. Hur förhåller sig denna punkt till $(B \cdot A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? Var detta en dum fråga? Om inte, försök visa påståendet.

2. Finn en matris M så att $M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ och $M\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Kan ni skriva om dessa två ekvationer som *en* ekvation (med två matriser)?

3. Kan ni hitta en matris K så att $K\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $K\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

4. Med K och M som i de två föregående uppgifterna, vad blir $KM\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$? Vad blir $KM\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$? $KM\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$? Varför? Skall vi kalla förhållandet mellan M och K för något särskilt?

5. Matrisen $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ flyttar varje punkt i planet till någon punkt i planet. Går det att ångra sig och flytta allting tillbaka till samma plats med hjälp av en matris?

Vad sa vi i Del A om att hitta tillbaka?

6. Hur blir det om $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$?

7. Finns det någon matris M så att $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ för alla (x, y)? Finns det många sådana? Ledning: Välj (x, y) med omsorg.

Lätt uppgift som kan vara svårlöst.

8. Vad är det som är så speciellt med $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Varning: Vår I kallas E i boken. Eller kanske till och med $\mathfrak{E}$ (snirkligt E). Fråga mig inte varför.

9. Lös ekvationen $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ genom att hitta en matris A' så att $AA' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och sedan göra något klyftigt.
   Jämför detta med hur man löser ekvationer av typ $ax = b$ för reella tal. Vad är motsvarigheten till A' i det fallet? När kan man *inte* lösa en sådan ekvation för reella tal?

10.* För vilka matriser A kan man hitta en matris A' så att $AA' = I$?

11.* Kan ni ge en formel för A' om $AA' = I$ och $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

E Determinanter

1. *Determinanten* till en 2×2 matris $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är $\det M = ad - bc$. Vad vet ni om den? I synnerhet, vad har det för betydelse om $\det M = 0$ eller inte? Räkna upp allting ni vet om detta.

Gör det!

2. Vad är förhållandet mellan $\det A$ och arean av $A(\mathcal{R})$? Mellan $\det A$, $\det B$ och arean av $B(A(\mathcal{R}))$? Vad händer om vi byter ut $\mathcal{R}$ mot $\mathcal{S}$ (se övning C–7)?

3. Låt $M = AB$. Vad vet vi om $\det M$? (Tänk på föregåeende uppgift).

4. Finns det två olika punkter (x, y) och (z, w) så att $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$? Kan ni svara på frågan utan att leta efter sådana punkter?

5. Visa att om $\det A = 0$, då finns det två olika punkter (x, y) och (z, w) så att $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$. (Om ni är lata, välj den ena punkten med omsorg.)

6.* Visa påståendet i uppgift 3 algebraiskt.

Gör det hemma, i enrum, nån kväll.

7.* Låt (x, y) och (z, w) vara två *olika* punkter. Om $\det M \neq 0$, visa att M inte skickar (x, y) och (z, w) till samma punkt. Vad säger detta om funktionen $f_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som bestäms av M?

F Ekvationslösning

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

2. Finn alla lösningar till de två ekvationssystemen

$$\begin{aligned} x + 2y &= 25 \\ 3x + 6y &= 75 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 3x + 6y &= 7 \end{aligned}$$

3. Skriv om föregående uppgift som två matrisekvationer. Förklara geometriskt varför det blir två olika svar.

G Linjärt (o)beroende

Man tänker sig ofta en vektor (a, b) som en pil från origo till punkten (a, b). Vektorer adderas så här: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Man multiplicerar en vektor med ett reellt tal k så: $k(a, b) = (ka, kb)$. Vad är den geometriska betydelsen av detta?

1. Två vektorer (a, b) och (c, d) sägs vara *linjärt beroende* om det finns ett reellt tal k så att $(a, b) = k(c, d)$. I annat fall sägs de vara *linjärt oberoende*. Om (a, b) och (c, d) är linjärt beroende, vad kan man säga om deras placering i planet (titta på exempel)? Vad kan man då säga om det $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$? Om det $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$? Hur blir det om (a, b) och (c, d) är linjärt oberoende?

   Här förutsätts att $(c, d) \neq (0, 0)$.

   I planet $\setminus (0, 0)$ är linjärt beroende en ekvivalensrelation. Vilken?

2. Visa att om man vet hur en matris M verkar på vektorerna (1,0) och (0,1), då vet man vad M är för matris. Ledning: Antag att $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ och $M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Använd detta för att skriva *en* matrisekvation av vilken M framgår tydligt.

3. Använd föregående uppgift för att finna matrisen R_α som roterar planet α grader motsols. Vad borde denna matris ha för determinant?

4. Visa att om man vet hur A verkar på två linjärt oberoende vektorer då vet man vad A är för matris. (Skriv en matrisekvation och lös den.)

5. Finn A så att A avbildar planet på linjen $y = 3x$. Ledning: Vad vet vi om A? Beskriv *alla* matriser som avbildar planet på linjen $y = 3x$.

6. Finn A så att linjen $y = 3x + 2$ avbildas på punkten (2,6).

7. Hur kan man rotera planet runt en punkt $(x, y) \neq (0, 0)$?

8.* Om ℓ är en linje i planet och (a, b) är en punkt i planet, finns det då alltid en matris A så att $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a, b)$ för alla (x, y) på ℓ?

9.* Låt M vara en 2×2 matris. Definiera funktionen $f_M : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $f_M(x, y) = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. För vilka M är f_M en bijektion? För vilka M är f_M injektiv? Surjektiv?

H Att göra hemma (eller på bussen (eller på kaféet...))

för inte pluggar ni så mycket hemma eller hur?

1. Vad har det för betydelse om $\det M = 0$ eller inte? Räkna upp allt ni vet om det.

   Ja, ja, visst vet jag att ni redan gjort det. Men detta är något man bör göra om med jämna mellanrum livet ut. Dessutom kan detta väl vara lämpligt att ha med sig på en fusklapp?

2. Parallellogrammet $\mathcal{P}$ spänns upp av vektorerna $(1, 3)$ och $(2, 5)$. Bestäm $M(\mathcal{P})$ för $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Beräkna också arean av dessa.

3. Låt ℓ vara linjen $y = 5x$. Bestäm $M(\ell)$ för $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Finn inversen, om den existerar, till ovanstående matriser.

5. Finn matrisen som skickar $(1, 5)$ till $(2, 7)$ och $(2, 3)$ till $(8, 2)$.

6. Matrisen M skickar $(2, 3)$ till $(5, 6)$ och $(4, 1)$ till $(7, 2)$. Bestäm M.

7. Matrisen $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & x \end{pmatrix}$ skickar hela planet till en linje. Bestäm x.