Uppgifter – del 2

I Bort med koordinaterna!

1. Slå upp definitionen av *linjärt rum* (kallas också *vektorrum*). Kolla att de angivna räknelagarna gäller för $\mathbb{R}^2$ och också för mängden av alla 2×2 matriser. Slå också upp definitionen av *linjär transformation* och verifiera att en 2×2 matris är en linjär transformation från vart och ett av dessa linjära rum till sig självt.

   Transformation = avbildning

2. Använd detta för att visa att en matris skickar en linje genom origo till en linje genom origo. Gör detta genom att skriva ekvationer med matriser och vektorer, där ni t ex kan skriva $\mathbf{x}$ för vektorn (x, y), men skriv *inte* ut några koordinater eller matriselement.

   Ledning: Hur kan man representera alla vektorer som ligger på samma linje genom origo som vektorn $\mathbf{x}$?

3. Gör om föregående övning för tre dimensioner (d v s en 3×3 matris och en linje genom origo i rummet).

4. Gör om övning 2 för en linje som inte går genom origo.

   Ledning: En sådan linje kan representeras som en linje genom origo plus en konstant vektor (övertyga er om det först).

5. Visa att om A är en matris och $\mathcal{P}$ ett parallellogram vars ena hörn är origo, då är $A(\mathcal{P})$ ett parallellogram vars ena hörn är origo. Ledning: Ett parallellogram bestäms av två vektorer. Inga koordinater eller matriselement behövs.

6.* Är det svårare att visa ovanstående för ett godtyckligt parallellogram?

J Linjärt beroende. Igen

1. Här är en ny definition av linjärt beroende: Vektorerna (a, b) och (c, d) är linjärt beroende om det finns reella tal r och s, inte båda lika med 0, så att $s(a, b) + r(c, d) = 0$. Är denna definition ekvivalent med den tidigare?

   Denna definition generaliseras direkt till högre dimensioner. Alltså är den bättre, eller hur?

2. Två vektorer är linjärt *oberoende* om de inte är linjärt beroende. Formulera definitionen av linjärt oberoende utan att använda negation.

   Använd kvantorer!

3. Visa att vektorerna $(0, 0)$ och (x, y) alltid är linjärt beroende.

4. Visa att (a, b) och (c, d) är linjärt oberoende om och endast om $Det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \neq 0$.

   Två saker att visa

5. Visa att om (a, b) och (c, d) är två linjärt oberoende vektorer, då kan man skriva varje vektor (x, y) som $(x, y) = r(a, b) + s(c, d)$, där $r, s \in \mathbb{R}$. Innan ni sätter igång, tänk på den geometriska bilden, på ekvationslösning och på matrisekvationer.

6. Om man vet hur A verkar på två linjärt oberoende vektorer, då kan man bestämma A. Hur?

K Projektionsmatriser

1. Finn en matris A som projicerar planet på linjen $y=-x$, på så sätt att varje punkt (a,b) i planet går till den punkt på linjen som ligger närmast (a,b).

   Detta kallas *ortogonal projektion*

   Gör om för linjen $y=ax$ där a är ett godtyckligt reellt tal. (Använd G-4).

2. Låt P vara ett plan innehållande origo i tredimensionellt rum. Då har P ekvationen $ax+by+cz=0$ (d v s varje punkt (x,y,z) i planet uppfyller ekvationen) och vektorn (a,b,c) är en *normalvektor* till planet. D v s (a,b,c) är vinkelrät (eller *ortogonal*) mot planet.

   Diskutera hur ni skulle kunna ta fram 3×3 matrisen M som projicerar rummet ortogonalt på planet P, d v s så att varje punkt (x,y,z) i rummet går till den punkt i planet som ligger närmast (x,y,z).

   Försök bara komma fram till *hur* ni kan bestämma den. Utför inga jobbiga uträkningar, det kan ni göra hemma.

   Ledning: Det räcker att veta hur matrisen verkar på tre linjärt oberoende vektorer. Välj dessa med omsorg.

3. Låt A vara en matris som projicerar rummet ortogonalt på ett givet plan. Vad är A^2? (Tänk geometriskt!) Vad är A^{173}?

L Kärna och bild

Kärnan (eller *nollrummet*) till en matris A är mängden av alla punkter som går till origo under A:s verkan. Den betecknas $Ker(A)$, så $Ker(A)=\{\mathbf{x}\mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.
Bilden (eller *värderummet*) till A definieras av $Im(A)=\{A\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\}$.

Jämför med värde*mängd*

1. Hur verkar $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ på punkterna $(6,3),(2,1),(10,5)$? Varför?

   I många av övningarna går det att kolla svaren. Gör det!

2. Finn $Ker(A)$ och $Im(A)$ för $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ och $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

3. Planet har dimension 2, en linje har dimension 1 och en punkt har dimension 0. Visa att summan av dimensionerna av $Ker(A)$ respektive $\text{im}(A)$ är lika med 2 för varje 2×2 matris A. Ledning: betrakta de tre fallen $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A\neq\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ men $DetA=0$, och $DetA\neq 0$.

4. Finn bilden till $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -8\end{pmatrix}$ och kärnan till $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$. Bestäm BA. Förklara.

5. Finn en matris A så att $\text{im}(A)$ är linjen $y=3x$.

6. Finn en matris A så att $Ker(A)$ är linjen $y=2x$.

7.* Beskriv alla matriser A så att $\ker(A)=\text{im}(A)$. Ledning: Vad kan man då säga om A^2? Vad är det som händer när man låter A verka på planet och sedan låter A verka på $\text{im}(A)$?

8.* Visa att $KerM\subseteq KerM^2$ för varje matris M. Vilket förhållande råder mellan mängderna ImM och ImM^2?

   Så här visar man att en mängd är en delmängd i en annan: Antag $x\in A$. Då är ...blablablabla..., så $x\in B$. Alltså $A\subseteq B$.

M Ekvationssystem och homogena lösningar

Läs i boken (hemma) om ekvationssystem innan ni diskuterar detta avsnitt i gruppen. Vi tar med bara några få övningar här. Räkna desto fler sådana hemma. Och observera att det är lätt att testa sina svar här!

1. Lös systemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 4x & + & 2y & + & z & = & 12. \end{array}$$

   Bestäm sedan $f(x) = ax^2 + bx + c$ så att $f(-1) = 0$, $f(1) = 6$, och $f(2) = 12$.

2. Lös ekvationssystemet och bestäm determinanterna för alla inblandade matriser:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 5 \\ x & + & 3y & + & z & = & 7. \end{array}$$

   Läs på sidan 2:12 i boken om $n \times n$ determinanter.

3. Vad har vi kallat lösningsmängden till det *homogena systemet* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

4. Låt A vara en $n \times n$ matris och $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Låt $\mathbf{x}_1$ vara en (*partikulär*)lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x}_0$ en lösning till det motsvarande homogena systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Visa att $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$ är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   Linearitet!

5. Ta fram tre olika lösningar till $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}(x, y) = (1, 3)$. Ligger lösningarna på samma linje? Är det alltid så? Vilken lutning har linjen jämfört med $KerA$?

   Men detta är ju exakt samma övning som 4, eller hur?

6.* Antag att $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. Visa att *varje* lösning $\mathbf{x}$ till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan skrivas som $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, där $\mathbf{x}_0$ är någon lösning till det motsvarande homogena systemet.

   Enkel algebra (och ett (enkelt) knep)

N Egenvektorer och egenvärden

1. Nu skall vi försöka förstå hur vi kan hitta de linjer som inte flyttas av en matris A.

   a) Låt $M = A - \lambda I$. Om $DetM = 0$, visa att det finns en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så att $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ledning: vad har vi kallat linjen genom origo som $\mathbf{x}$ ligger på?
   b) Visa att vi då har $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
   c) Visa att vi då även har $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ för varje $\mathbf{z} = k\mathbf{x}$ där $k \in \mathbb{R}$.
   d) Beskriv i ord vad detta säger om matrisen A:s verkan på planet.
   e) Hur hittar du nu linjerna som inte flyttas av en matris?

Definition: Låt A vara en matris och $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en vektor så att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ för något tal $\lambda \in \mathbb{R}$. Då kallas $\mathbf{x}$ en *egenvektor* till A och λ ett *egenvärde* till A motsvarande $\mathbf{x}$.

2. Finn egenvärden och motsvarande egenvektorer till $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

   Var så lata som möjligt här

3. Låt A vara en matris som avbildar planet på en linje. Vad kan man säga om A:s egenvektorer?

   Ledning: Avsnitt L

4. Bestäm egenvärden och egenvektorer för $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ då $a \neq b$, respektive $a = b$. Behövde ni räkna?

5. Vad kan man säga om en matris A som har 0 som egenvärde?

6. Vilka matriser har bara en egenvektor (bortsett från multiplar av denna)? Ledning: Om så är fallet, vad kan man då säga om de två egenvärdena (hur räknar man fram egenvärdena?). Ge exempel på en sådan matris.

7. Finns det matriser med två linjärt oberoende egenvektorer, men bara ett egenvärde? Beskriv alla sådana matriser.

8. Låt A vara en matris med egenvektor $\mathbf{x}$ och motsvarande egenvärde λ. Visa att $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$. Linearitet!

9. Låt A vara en matris med två linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ och låt $\mathbf{v}$ vara en godtycklig vektor. Beskriv $A^n\mathbf{v}$ utan att använda A. Ledning: 8 och J-5.

10. M är en matris som projicerar rummet ortogonalt på planet $x + 3y + 2z = 0$. Finn tre linjärt oberoende egenvektorer till M och motsvarande egenvärden. Se K-2. Behöver man ta fram M?

11. Finn en matris som roterar rummet på något icke-trivialt sätt. Man kan med fördel tänka sig att man tittar på jordklotet utifrån och roterar det på olika sätt (inte nödvändigtvis alltid i samma axel).

12. Diskutera vad en sådan matris har för egenskaper (egenvärden/vektorer, determinant, etc.). Se uppgift 15.

13.* Finns det något samband mellan en matris egenvärden och dess determinant?

14.* *Spåret* till en matris $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är spår(A)= $a + d$. Finns det något samband mellan spåret och egenvärdena till A?

15.* Låt R vara en matris som roterar enhetssfären (och därmed hela rummet). Måste det finnas en punkt på enhetssfären som sitter still (en fixpunkt)? Bevisa det eller hitta ett motexempel. Svår uppgift? Antagligen. Men vacker.

O — Otroligt men sant

En illustration av vad linearitet innebär: Antag att jorden är en perfekt kula och att vi har lagt ett snöre utefter hela ekvatorn. Snöret är då ungefär 40 000 km långt. Hur mycket längre behöver snöret göras för att gå runt ekvatorn i en meters höjd?

Icke-linearitet: Hur många gånger behöver man dubbelvika ett millimeter tjockt pappersblad för att det skall nå till månen? Till solen?

Gå igenom alla tidigare övningar. Skriv sedan en lista på vad det har för betydelse att $DetM = 0$, respektive $DetM \neq 0$, för en matris M. Igen?! Kom igen!

Jag sa ju det. Och detta är inte sista gången.