Matematik D1 del B – ht 99

Uppgifter – del 3

Övningens syfte

Att studera begreppen *vektor, linje* och *plan*, räkneregler för dessa, avstånd mellan dessa, skillnader och likheter, area och volym, minstakvadratmetoden.

P Vektorer

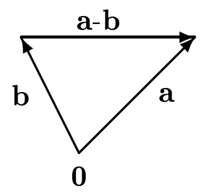
1. Vad är en vektor? Tänk igenom hur det blir både i 2 och 3 dimensioner (det gäller alla uppgifter).
2. Låt $V = \{\text{alla riktade sträckor i rummet}\}$. Ett element i V kan alltså beskrivas som ett punktpar $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, varvid man tänker sig att sträckan utgår från $\mathbf{p}$ och slutar i $\mathbf{q}$. Definiera en relation E på V genom att säga:

   $\mathbf{x}E\mathbf{y} \Leftrightarrow$ $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ har samma längd och riktning, och är parallella (eventuellt sammanfallande).

   Visa att E är en ekvivalensrelation på V. Finns det ett bra sett att ge en representant för en ekvivalensklass?
3. Hur adderas två vektorer?
4. Hur multipliceras en vektor med ett tal? Hur ser det ut geometriskt?
5. Kan man multiplicera två vektorer?
6. Räkna uppgift 2 och 3 i boken (sid 1:06). Gör inrutade övningar hemma. Igår.

Q Skalär produkt

1. Vad är längden, $|\mathbf{v}|$, av en vektor $\mathbf{v}$? Vad har den med skalärprodukt att göra?
2. Betrakta figuren till höger. Låt $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^2$. Enligt Pythagoras sats vet vi att om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är vinkelräta så gäller



$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2.$$

   Vad är det som ”saknas” i högerledet? Vad måste vara 0 för att $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ skall vara vinkelräta?
3. Hur blir det i $\mathbb{R}^3$?
4. Vad menas med vinkeln mellan två vektorer?
5. Tag två godtyckliga vektorer (a, b) och (c, d) i planet. Beräkna $\cos\alpha$, där α är vinkeln mellan vektorerna. Uttryck svaret i a, b, c, d. Tips: G-3.
6. Hur hänger detta ihop med uppgift 2 i detta avsnitt?

7. Tänk igenom definitionen av skalär produkt i 2 och 3 dimensioner. Vilka räkneregler gäller?

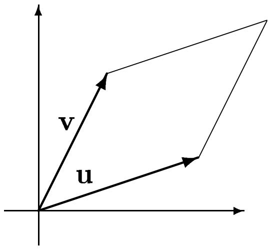
8. Läs igenom Sats 2 sid 1:12. Hur stämmer den överens med föregående uppgifter i detta avsnitt?

9.* Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Hur kan man hitta en vektor $\mathbf{z}$ som är vinkelrät mot $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$? (Lös ett ekvationssystem. Ändra längden på $\mathbf{z}$ på slutet så att det blir snyggt.)

$\boxed{10.}$ Räkna uppgifterna 4, 6, 8, 9, 10, 11 (sid 1:10) och 15, 16 (sid 1:13).

R **Vektorprodukt**

1. Vilken formel brukar ni använda för att räkna ut arean av en triangel? Av ett parallellogram? Om det var något med höjden, använd då den för att räkna (beskriva) arean av parallellogrammet i figuren.



2. Hur blir det om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte båda ligger i första kvadranten? (Jämför med C-9).

3. Vad blir arean av ett parallellogram som spänns upp av två vektorer i $\mathbb{R}^3$?

4. Läs igenom definitionen på sidan 1:16 och satsen på sidan 1:20. Känner ni igen detta från tidigare övningar? Jämför även med C-8 och med Q-9.

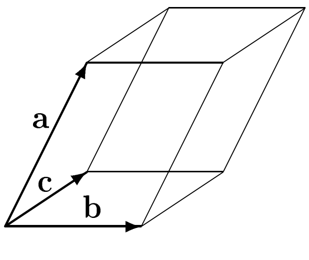
5. Ni har tidigare använt determinanter för att beräkna arean av parallellogram. När blir determinanten negativ? Vad motsvarar det hos vektorprodukten?

Om ni inte tycker att man kan använda vektorprodukt i två dimensioner, bädda då in planet i $\mathbb{R}^3$ på lämpligt sätt (välj ett bra plan i $\mathbb{R}^3$).

$\boxed{6.}$ Gör övning 23 (sid 1:16).

S **Volym**

1. I vilken ordning skall man "skriva" vektorerna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ i figuren för att få ett högersystem? Ett vänstersystem? (Finns det flera olika sätt? Hur många?)



2. Vad blir basarean av parallellepipeden i figuren?

3. Vad blir höjden?

4. Vad blir volymen av parallellepipeden?

5.* Vad blir volymen av tetraedern som spänns upp av $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$?

Jämför med övning 29 (1:23).

T — Determinant av ordning 3

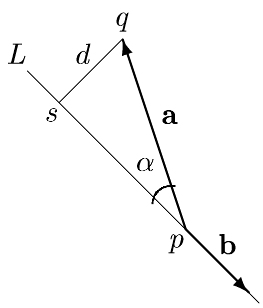
1. Beräkna $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \stackrel{def}{=} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ med hjälp av satsen sid 1:20 och sats 2 sid 1:12. Skalär trippel-produkt
2. Jämför med definitionen av determinant av ordning 3:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \stackrel{def}{=} a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x - a_y b_x c_z - a_x b_z c_y.$$

3. Kan vi använda en determinant för att beskriva volymen av en parallellepiped? För att beräkna vektorprodukten?
4. Hur kan man avgöra om fyra punkter i rummet ligger i samma plan? Vad har detta med linjärt beroende att göra? Volym? Fyra punkter "=" tre vektorer
5. Gör övning 30a sid 1:23.

U — Linjer

1. Ge exempel på information som är tillräcklig för att bestämma en linje.
2. Hur kan ni få linjens ekvation med hjälp av den informationen?
3. Man kan representera linjer på olika sätt (vilka?). Förvissa er om att ni kan översätta mellan de olika sätten.
4. Titta på figuren (p, q och s är punkter, L en given linje). Bestäm vektorn $\overline{ps}$.
5. Hur kan man beräkna kortaste avståndet d mellan en linje och en punkt?
6. Gör övningarna 34, 36, 38, 39, sid 1:26.



V — Plan

1. Ge exempel på information som är tillräcklig för att beskriva ett plan.
2. Hur kan man få formen $Ax+By+Cz+D=0$, med hjälp av den informationen?
3. Ta fram planets ekvation med hjälp av en vektor (n_x, n_y, n_z), vinkelrät mot planet, en bestämd punkt (x_0, y_0, z_0) i planet och en godtycklig punkt, (x, y, z).
4. Kan man skriva ett plan på parameterform? Förklara
5. Hur många parametrar behöver man då? Varför? geometriskt!

6. Punkterna $(-4,-2,3)$, $(1,3,-2)$, $(0,3,-2)$ och $(5,-2,0)$ utgör hörnen i en tetraeder. Vi skall nu beräkna volymen av tetraedern på ett nytt sätt (se S-5). Bestäm planet som innehåller basen. Bestäm sedan den linje som är vinkelrät mot planet och som går igenom det återstående hörnet på tetraedern. Med hjälp av denna linje beräkna höjden, och sedan volymen av tetraedern.

$\boxed{7.}$ Gör övningarna 43, 45, 47, 50, 52, sid 1:29.

$\boxed{\mathbf{W}}$ **Linjer och plan**

1. En rät linje i $\mathbb{R}^2$ har ekvationen $Ax + By = C$. Vad är vektorn (A, B)?

2. Varför räcker det med samma information, d v s vektor och punkt, för att beskriva ett plan som för en linje?

3. Man skulle kunna se parametriseringen av en linje i $\mathbb{R}^3$ som en linjär avbildning från $\mathbb{R}$ in i $\mathbb{R}^3$. Beskriv denna avbildning.

4. På samma sätt som ovan kan man se parametriseringen av ett plan som en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ in i $\mathbb{R}^3$. Beskriv även denna avbildning.

$\boxed{5.}$ Gör övningarna 56, 58, 59, 60, sid 1:30.

$\boxed{\mathbb{X}}$ **Minstakvadratmetoden** (om ni hinner)

Minstakvadratmetoden använd väldigt mycket i olika tillämpningar och ni kommer att använda den i mattekursen nästa höst.

1. Betrakta matrisavbildningen $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X}$ där

$$\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

   $\mathbb{X}$ ligger i planet och $\mathbb{X}$ avbildas på en vektor $\mathbb{Y}$ i rummet.

2. Visa att alla vektorer $\mathbb{Y}$ ligger i ett plan i rummet. Bestäm ekvationen för detta plan på formen $Ay_1 + By_2 + Cy_3 + D = 0$.

3. Betrakta ekvationssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

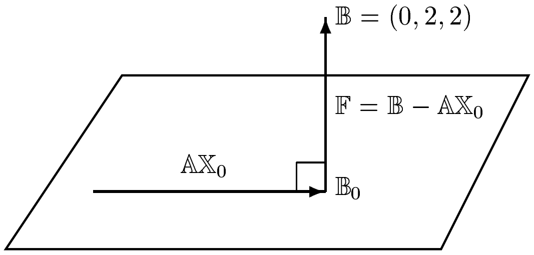
   Är detta system lösbart?

4. Bestäm alla högerled för vilka systemet är lösbart.

5. Ekvationssystemet ovan är inte lösbart eftersom alla lösningar $\mathbb{A}\mathbb{X}$ ligger i ett plan och punkten $\mathbb{B} = (0, 2, 2)$ ligger inte i det planet. Vilken punkt blir den bästa approximationen till högerledet?

6. Vad blir lösningen av ekvationssystemet med det nya högerledet?

7. Betrakta figuren. I föregående övning skulle ni bestämma vilken punkt i planet som gav den bästa approximationen. Förhoppningsvis valde ni högerledet så felvektorn $\mathbb{F}$ blev så kort som möjligt. D v s, eftersom



$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2 - x_1 - x_2 \\ 2 - 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

   innebär det att minimera

$$|\mathbb{F}| = \sqrt{(-x_1 + x_2)^2 + (2 - x_1 - x_2)^2 + (2 - 2x_1 + x_2)^2}.$$

   Kvadratsumman under rottecknet skall alltså minimeras; därav namnet *minstakvadratmetoden.*

8. Ett enkelt geometriskt sätt är att välja högerledet $\mathbb{B}_0$ så att felvektorn $\mathbb{F} = \mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0$ är vinkelrät mot planet $3y_1 + y_2 - 3y_3 = 0$. I förra övningen räknade vi fram lösningen genom att först beräkna $\mathbb{B}_0$. Vi skall nu ta fram en metod där vi slipper beräkna det nya högerledet för att hitta lösningen.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{F} = \mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0 & & \text{har minimal längd} \\
& \Longleftrightarrow & \\
\mathbb{F} = \mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0 & \perp & \text{planet} \\
& \Longleftrightarrow & \\
\mathbb{F} = \mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0 & \perp & \text{varje vektor i planet} \\
& \Longleftrightarrow & \\
\mathbb{F} = \mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0 & \perp & \mathbb{A}\mathbb{X} \quad \forall \mathbb{X} \\
& \Longleftrightarrow & \\
\mathbb{A}\mathbb{X} \cdot (\mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0) & = & 0 \quad \forall \mathbb{X} \\
& \Longleftrightarrow & \\
(\mathbb{A}\mathbb{X})^t (\mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0) & = & 0 \quad \forall \mathbb{X} \\
& \Longleftrightarrow & \\
\mathbb{X}^t \mathbb{A}^t (\mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0) & = & 0 \quad \forall \mathbb{X} \\
& \Longleftrightarrow & \\
\mathbb{X}^t (\mathbb{A}^t \mathbb{B} - \mathbb{A}^t \mathbb{A}\mathbb{X}_0) & = & 0 \quad \forall \mathbb{X} \\
& \Longleftrightarrow & \\
\mathbb{A}^t \mathbb{A}\mathbb{X}_0 & = & \mathbb{A}^t \mathbb{B}.
\end{array}
$$

Sätt nu in siffrorna från tidigare och lös systemet!

9. Räkna ut felvektorns längd.

10. Vad blir medelfelet?

11. Gör övningarna 22a,c,e på sid 4:24.