Uppgifter – del 4

Övningens syfte

Hittills har ni mest sysslat med 2×2 matriser och 3×3 matriser. Nu skall ni titta på hur det fungerar för $n \times n$ matriser för godtyckligt n och ibland även till $n \times m$ matriser där $n \neq m$. I stort sett gäller samma räkneregler för $n \times m$ matriser som för 2×2, förutom att vissa operationer inte är meningsfulla om $n \neq m$. Mycket av det ni skall göra på denna lapp kan man göra själv, men framförallt uppgift Z-2 är bra att diskutera igenom ordentligt i gruppen.

Y Några uppgifter att göra hemma först

Läs snabbt igenom avsnitt 2.2 samt kapitel 3 (förutom 3.4) i boken och kolla att du behärskar räknereglerna för matriser. De flesta av dessa gäller godtyckliga $n \times m$ matriser. För att vara säker på att du har förstått allt kan du titta på följande övningsuppgifter (och eventuellt räkna några om det är något du är osäker på).

1. Gör övningarna 3.1, 3.6b, 3.7, 3.15, 3.18 (för godtyckligt m), 3.21, 3.42, 3.43*. Dessa finns på sidorna 3:02, 3.05, 3:07 och 3:14.

2. Om A och B är $n \times n$ matriser, vad blir $(A+B)^2$? Är du säker?

3. Om A och B är inverterbara, vad är inversen till AB? Vad innebär detta geometriskt, d v s om man tänker på hur de inblandade matriserna avbildar $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$? Jämför med invers av sammansatt funktion $f \circ g$.

Z Linjära ekvationssystem

Varje linjärt ekvationssystem kan skrivas som en matrisekvation. Vi såg för 2×2 matriser att dessa kunde ha 0, 1 eller ∞ många lösningar. Nu skall vi fundera på hur det kan bli för $n \times n$ matriser. På föreläsningarna har jag berättat om Gausselimination, eller eliminationsmetoden som det också kallas. Den är generellt sett det effektivaste sättet att lösa ett linjärt ekvationsystem.

Ni *måste* kunna eliminationsmetoden som rinnande vatten!

1. Lös följande uppgifter på sidorna 4:07, 4:16, 4:21, 4:24:
4.4b, 4.5bc, 4.6cf, 4.9,4.10eh*, 4.11*, 4.12*, 4.13, 4.18, 4.20, 4.21, 4.22a

Också hemma

2. Antag att vi har ett ekvationssystem med m obekanta som vi skrivit om på trappform och fått något i stil med

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} p_1 & & & & & & b_1 \\ 0 & \cdots & p_2 & & & & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & p_3 & & & b_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & p_r & \cdots & b_r \\ 0 & & & \cdots & & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & 0 & b_n \end{array}\right)$$

där alla $p_i \neq 0$. Ge villkor för att systemet skall ha exakt en lösning, inga lösningar respektive oändligt många lösningar.

Slå upp definitionen av *rang*. Vad är rangen till A ovan?

Å Determinanter,(en hel del av detta har jag gjort på föreläsningarna.)

I hela det här avsnittet om determinanter är alla matriser av typ $n \times n$ för något n.

1. Vi har talat om determinanter för 2×2 och 3×3 matriser. För $n \times n$ matriser kan man definiera determinant rekursivt på följande vis. Välj ut en rad eller en kolonn. Determinanten till matrisen A är

$$\det(A) = \sum_{rad/kol.} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}),$$

Har vi t ex valt rad i, då blir det $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$

där summan löper över alla a_{ij} i den rad/kolonn vi valt och $A_{i,j}$ är den matris som man får då man tar bort rad i och kolonn j, d v s den rad och den kolonn som a_{ij} står i. Detta ser mer komplicerat ut än vad det är. Börja att prova att räkna ut detta för en allmän 2×2. Vad händer ifall ni väljer en annan rad eller kolonn? Prova sedan med en allmän 3×3 matris. Att det inte spelar någon roll vilken rad eller kolonn man väljer kan man visa, men det skall vi inte ägna oss åt här.

2. Kan ni säga något om förhållandet mellan determinanten till A och determinanten till den matris man fått när man gjort A trappformad? Tänk efter vad ni använder för operationer för att finna trappmatrisen och hur dessa påverkar determinanten. Jämför med uppgift M-2.

3. Vad är determinanten av en triangulär matris? Vilka element i matrisen är inblandade?

4. Gäller det att: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har exakt en lösning? Börja med att fundera på hur det fungerar för en trappmatris.

5. Precis som för 2×2 och 3×3 matriser så ger determinanten av en matris förändringen av volym. Kan ni använda detta för att motivera följande påstående: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$?

6. Vi vet att om A är en 2×2 matris så gäller att A inverterbar $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$. Med hjälp av uppgift 4 kan ni nu visa att detta gäller för en godtycklig $n \times n$ matris A, d v s att A är inverterbar om och endast om $det(A) \neq 0$. Att ge en formel för inversen är ganska komplicerat och det behöver ni inte göra.

Är inte detta trolleri? Att visa att inversen finns utan att ta fram den?

7. I uppgift J-2 gav ni en definition av linjärt oberoende för 2-dimensionella vektorer. Kan ni generalisera denna till högre dimensioner? Hur många vektorer är inblandade i er definition? Kan ni uttrycka i ord vad linjärt beroende betyder? Geometriskt?

8. Visa att $(\mathbf{a}_1|\cdots|\mathbf{a}_n)\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ där $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Använd detta för att visa att A inverterbar $\Leftrightarrow$ A:s kolonner är linjärt oberoende.

Ä Om ni hinner

1. Låt $\mathbf{v}$ tillhöra $\mathbf{R}^n$. Skriv upp ett uttryck för matrisen P som projicerar vektorer vinkelrätt på linjen som går genom v och origo. Gör sedan samma sak med matrisen H som speglar en vektor i denna linje. (En sådan matris kallas för en *Householdermatris*).

   Detta är en svår uppgift, trots att svaret kan formuleras ganska enkelt, förutsatt att man uttrycker det med hjälp av vektorer (utan koordinater). Ni har faktiskt löst detta i fallet $n = 2$ (uppgift J-1). Tänk på den lösningen. Om ni lyckas översätta den till vektorform borde den generaliseras till godtyckligt n. Ni kan också tänka på hur detta ser ut i tre dimensioner, ifall det känns för trångt i två. Ledning: Om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är vektorer i $\mathbf{R}^n$, vad är $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$? Vad är $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$?

2. Finn en matris $G(i, k, \theta)$ som roterar $x_i x_k$–planet θ radianer men lämnar övriga koordinater oberörda. (Sådana matriser kallas *Givensmatriser*). För 2×2 matriser har ni redan gjort detta.

3. Hitta matrisen S som speglar i ett hyperplan givet av ekvationen $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$. Ni kan börja med att finna den matris som projicerar ortogonalt på hyperplanet.

4. En matris A sägs vara *ortogonal* om $A^TA = I$. Visa att Givensmatriser och Householdermatriser är ortogonala. Är matrisen S i uppgift 3 ortogonal?

5. Projicera en godtycklig 3-dimensionell kub till datorskärmen. Gör samma med en 4-dimensionell kub.

6. (Markovkedjor) Anta att vi har något slags ”system,” som kan befinna sig i n olika ”tillstånd.” Anta vidare att systemet slumpmässigt kan övergå i ett nytt tillstånd med jämna tidsintervall. Som ett enkelt exempel kan man ta vädret som kan befinna sig i de två tillstånden vackert väder respektive mulet, vilket kan ändras från dag till dag.
   Låt p_{ij} vara sannolikheten att systemet övergår till tillståndet j givet att det befann sig i tillstånd i. Varför måste $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$?

   Sätt nu $P = [p_{ij}]$. (Vad blir matrisen P i exemplet med vädret ovan?) Låt q_{ij} vara sannolikheten att systemet efter två “övergångar” befinner sig i tillstånd j om det från början befann sig i tillstånd i. Hitta ett uttryck för q_{ij} i termer av elementen hos P, och inse med hjälp av detta att $Q = P^2$ där $Q = [q_{ij}]$.

7. (Interpolation) Anta att vi är intresserade av en funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som vi endast känner i ett ändligt antal punkter $x_1, \ldots, x_n$. Kalla motsvarande funktionsvärden $f_i (= f(x_i))$. (Dessa kan t ex vara kända genom mätningar.) Nu vill vi approximera f genom att försöka hitta ett polynom p som överensstämmer med f (interpolerar f) i punkterna x_i. grad $< n$. Vi söker alltså efter $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ så att $p(x_i) = f_i$ för $i = 1, \ldots, n$. Visa att detta problem leder till ett linjärt ekvationssystem med polynomkoefficienterna $a_0, \ldots, a_{n-1}$ som obekanta.

   Hur ser koefficientmatrisen ut? Vad blir högerledet?

Visa att systemet alltid har en unik lösning, d v s att det alltid finns precis ett sådant polynom av grad $< n$.

8. *Rangen* till en matris A kan definieras som dimensionen av $\mathrm{im}(A)$. Vilken rang kan en 3×3 matris ha? En 3×2 matris? Ge exempel på en matris för varje möjlighet. Vad är sambandet mellan $rang(A)$ och lösningsmängden till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$? Mellan $rang(A)$ och antalet trappsteg i matrisen man får när man tillämpar eliminationsmetoden på A?