Preliminär verion av: Inledning till matematisk analys, del 5

Ni har väl alla sett en del om derivator på gymnasiet, och ni vet förmodligen också något om vad ett gränsvärde är. Derivator finns överallt, och dem kan ingen undgå att tänka på i en eller annan form. Hastighet, inflation och räntesats är exempel på derivator. När bussen bromsar och man ramlar på nästa människa är det en (andra–) derivata som plötsligt blir väldigt negativ. I alla dessa fall är derivatan ett tal, men en derivata kan även vara en vektor.
Derivator kan man knappast behandla utan att använda gränsvärden. Till exempel är det meningslöst att tala om att köra i 90 km/tim vid en viss tidpunkt om man inte accepterar gränsvärden. Ändå vet vi att detta har någon mening i "verkligheten," för hastighetsmätaren i en bil visar ju en viss hastighet vid varje tidpunkt, och den kan inte ha reflekterat över det här med gränsvärden.
Ett klassiskt problem som inte kan lösas utan att hänvisa till gränsvärden är *Xenos paradox*. Xeno var en grekisk filosof som föddes för tvåtusenfemhundrafem år sedan (påstås det), men det tog över tvåtusen år innan hans paradox löstes. Kortfattat kan den beskrivas så här: Achilles skall tävla i kapplöpning med en sköldpadda. Eftersom sköldpaddan inte precis är känd för att vara snabb av sig får hon 100 meters förskott. Achilles springer 100 meter på 10 sekunder, men sköldpaddan bara 10 meter (OK, hon var ganska snabb). När Achilles har nått sköldpaddans startplats har hon alltså hunnit tio meter. Det tar Achilles en sekund att springa dit, men då har sköldpaddan hunnit en meter till. När Achilles har sprungit en meter till har sköldpaddan hunnit ytterligare en decimeter, och så här fortsätter det i all oändlighet, men Achilles hinner aldrig ikapp sköldpaddan.

α Derivata

Vi börjar med att dra oss till minnes något av det ni lärde er i gymnasiet.

1. Vad är derivatan $f'(x)$ om $f(x)$ är $x, x^2, 7$ respektive x^n, där $n \in \mathbb{N}$?

2. Vad är derivatan av följande funktioner: $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{m}}$ och $x^{\frac{n}{m}}$, där $n, m \in \mathbb{N}$?

3. Något svårare, vad är derivatan av funktionerna e^x, $\sin x$, $\cos x$ och $\tan x$?

4. Hur vet ni att detta är derivatan?

   För att läraren sa det?

5. Man kan beskriva en funktions derivata med hjälp av sekanter till funktionens graf. Diskutera detta och skriv ned en definition av derivata. Vad är den geometriska betydelsen av derivatan?

6. Använd denna tolkning av derivatan i en punkt, d v s som lutningen av tangenten till funktionsgrafen i denna punkt, för att bestämma derivatan till $f(x) = k$ där k är en konstant, och derivatan av $f(x) = x$.

β Räkneregler för derivata

1. Vilka räkneregler gäller vid derivering av $f(x) + g(x)$ och $f(x)g(x)$?

2. Kan någon av dessa räkneregler användas för att finna derivatan till $f(x) = x^n$ där $n \in \mathbb{N}$? Nu har ni tillräcklig kunskap för att derivera polynom. Varför?

Hur blir det om $n = 0$?

3. Kan ni också ur dessa regler härleda derivatan till $f(x) = x^n$ för alla $n \in \mathbb{Z}$?

$1 = x^n \cdot \frac{1}{x^n}$.

4. Försök på liknande sätt som i förra uppgiften uttrycka derivatan för $\frac{1}{g(x)}$ där g är någon deriverbar funktion. Härled också en formel för $\frac{f(x)}{g(x)}$. Har vi några krav på funktionerna för att detta skall gälla? OBS, nu kan ni derivera rationella funktioner d v s funktioner av typ $\frac{p(x)}{q(x)}$ där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom!

5. Vad är derivatan av $(x+3)^2$, $(x+3)^{1/2}$ och $(x^3+1)^{47}$?

6. En annan bra sak är att kunna beräkna derivatan av en sammansatt funktion $f(g(x))$. Det är en sådan regel man behöver för att finna derivatan av $(x^3+1)^{47}$ någorlunda lätt. Skriv ned vad derivatan av $f(g(x))$ är. Vad kallas denna regel? Vad är nu derivatan av $(x^3+1)^{47}$? Vad är f och g i detta exempel?

7.* Man kan också använda regeln i förra uppgiften för att härleda en formel för derivatan av $\frac{1}{g(x)}$. Gör det!

γ Derivering, en funktion

1. Vilka funktioner har derivata identiskt lika med noll?

2. Låt $M = \{\text{Funktioner i en variabel } x\}$ och $N = \{\text{Deriverbara funktioner i } M\}$. Man kan se derivering som en funktion $D : N \to M$. Är denna injektiv?

3. Ni kan lätt visa att både M och N är vektorrum. Alltså är derivering D en avbildning (funktion) från ett vektorrum till ett annat. Är D en linjär avbildning? I så fall, borde den ha egenvektorer? Kärna?

δ Gränsvärden

1. Vad skulle ni säga att ett gränsvärde är för något? Skriv något slags förklaring, kanske bara i ord och utan formler, av vad ni kommer fram till.

2. Vad är $\lim_{x\to 2} x$, $\lim_{x\to 2} x^2 - 4$ och $\lim_{x\to 3} k$?

3. Kan ni gissa några räkneregler för gränsvärden av summa och produkt? Gäller dessa alltid? Var gissningen enbart önsketänkande?

4. Vad är $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+2}$, $\lim_{x\to\infty} x$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$?

Om gränsvärdet är ∞ eller $-\infty$ kallar man det ett *oegentligt gränsvärde*

5. Kan ni hitta någon funktion som inte har ett gränsvärde (inte ens $\pm\infty$) när $x \to \infty$?

6. Låt f och g båda ha gränsvärdet ∞ när $x \to x_0$. Vad kan $f(x) - g(x)$ få för gränsvärde? Ge exempel. Stämmer detta med er utsaga i fråga 3?

7. Hur blir det med er andra räkneregel från 3? Vad är t ex $\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1}{x}$?

8. Låt f och g vara funktioner så att $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to x_0} g(x) = a \neq 0$. Vad är gränsvärdet av summan respektive produkten av f och g?

9. Låt nu $a = 0$ i fråga 8. Vad kan då $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ bli? Skriv upp exempel på funktioner f och g som ger dessa gränsvärden.

10. Sammanfatta vilka produkter, divisioner, additioner och subtraktioner som det inte går att tillämpa reglerna i fråga 3 på.

11. Vad är $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^7+x^5+2x^2}{4x^7+x^4+x^3-x^2}$, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^7+x^5+2x^2}{4x^7+x^4+x^3-x^2}$?

ϵ Instängningsregeln

1. Låt f, g och h vara funktioner sådana att $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ åtminstone för x nära x_0. Antag att $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ och $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. Vad vet vi om gränsvärdet för $h(x)$ när $x \to x_0$? Försök formulera detta som en sats.

2. Vad är $\lim_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$? Rita gärna upp med datorn och kolla vad det ser ut att bli. Hur argumenterar man för att det verkligen blir det?

3. Man kan visa att $\sin x \leq x$ och $x \leq \tan x$ då $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Rita och kolla att detta verkar rimligt. Använd detta och instängningsregeln för att beräkna $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

ζ Standardgränsvärden (och lite till)

Man brukar prata om standardgränsvärden, d v s gränsvärden som dyker upp ofta men som inte är helt triviala att beräkna. Gränsvärdet i ϵ–3 är ett sådant och vi skall nu titta på några till.

1. Sats 6.9 på sidan 172 i boken ger flera standardgränsvärden. Som minnesregel brukar man använda en ”prispall” där e^x står på vinnarplats, x^q på andra plats och $\ln x$ får jumboplatsen. Hur sammanfattar detta satsen?

2. Beräkna $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ och $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}\sin x}{e^{2x}}$.

Tips: Att utnyttja $h = e^{\ln h}$ då $h > 0$ är ett användbart trick när man ska undersöka potensfunktioner.

3. Vad tror ni att $\lim_{x\to\infty} x \sin 1/x$ blir? Och $\lim_{x\to\infty} x \ln 1/x$? Fundera på saken innan ni läser nästa mening.

Under lämpliga förutsättningar på f gäller $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(1/x)$.

η Gränsvärdesdefinitionen

Just gränsvärde är det som gör att vi kan formulera mycket av det vi gör i matematisk analys. Historiskt sett tog det väldigt lång tid innan man fick riktig klarhet i detta begrepp. Vi har valt att utelämna definitionen som kan upplevas lite svår att ta till sig, men den blir väldigt klar om man tar sig tid att studera den. Det börjar vi

Åtminstone om man tar sig väldigt lång tid. Kanske. Not.

med i följande stjärnmärkta frågor. Alla borde borde dock läsa (**långsamt**) igenom definitionen (åtminstone) en gång. (Femti gånger vore nog bättre.)

1.* Läs definitionen/erna av gränsvärde sid 75 och 78 i boken. Bevisa dina påståenden i uppgift δ–2.

2.* Bevisa att $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ direkt från definitionen av gränsvärde.

3.* Gör uppgifterna 306, 307 och 308 i boken.

4.* Vad är ett höger- resp. vänstergränsvärde? Har jag alltid ett gränsvärde om jag har ett högergränsvärde? Bevisa eller hitta motexempel. Hur blir det om jag har både ett höger och ett vänstergränsvärde? Har jag alltid högergränsvärde om jag har ett gränsvärde?

θ Derivata igen

Nu när vi känner till begreppet gränsvärde lite bättre kan vi förstå den abstrakta definitionen av derivata. Dessutom kan vi bevisa de regler för derivatan av $\sin, \cos$ etc. som ni lärde er redan på gymnasiet.

1. Diskutera igenom bokens definition av derivata på sid 98. Tillägna er också ordet differenskvot som nämns tidigare på sidan.

2. Förvissa er om att denna definition stämmer överens med den i uppgift α–5.

3. Vad är differenskvoten och derivatorna, i en godtycklig punkt x_0, till funktionerna i uppgift α–6 och funktionen $f(x) = x^2$? Kolla att derivatorna stämmer med vad ni fått tidigare.

4.* Som vi såg, tidigt i häftet, var formlerna i uppgift β–1 väldigt användbara. Använd nu bokens definition av derivata samt reglerna i uppgift δ–3 för att bevisa dessa formler. (Ledning: För att klara produktformeln måste man skjuta in och dra ifrån något lämpligt i täljare i differenskvoten.)

Att skjuta in och dra bort något lämpligt är en bra teknik (fult trick?) som används lite här och var i matematiken, inte minst i analysen.

5. Beräkna derivatan av $\sin x$ i punkten $x_0 = 0$ direkt från definitionen av derivata.

6. Hur blir det om ni låter x_0 vara en godtycklig punkt? Om ni diskuterar lite kanske någon av er kan komma ihåg någon trigonometrisk formel som kan komma till pass. (Ledning: Vad är $\sin(a+b) - \sin(a-b)$ lika med? Byt sedan a och b mot något lämpligt.)

7. Använd nu att $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ för att beräkna derivatan av $\cos x$. Vilka regler använde ni?

Derivera formeln; använd inte gränsvärdesdefinitionen av derivatan

8.* Vad är derivatan av $\tan x$?

9.* Man kan se att $x + 1 \leq e^x$ för alla x och att $e^x \leq 2x^2 + x + 1$ för $|x| < 2$. Rita upp, gärna m h a datorn, och förvissa er om att detta verkar rimligt. Vad är derivatan av e^x i punkten $x = 0$?

10.* Kan ni nu beräkna derivatan till e^x i en godtycklig punkt? Det är just detta som ger e^x dess speciella status bland exponentialfunktionerna (och därmed ln beteckningen ”naturlig”).

ι Derivata, lite smått och gott

1. Vad är tangentens ekvation för kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$? Vad är normalens ekvation?
2. Vad betyder $f^{(n)}$, d v s n:te derivatan? Gör en definition.
3. Vad är n:te derivatan av x^k?
4. Om $f(x)$ är en jämn (eller udda) funktion, vad kan man då säga om $f'(x)$? Vad kan man säga om $f^{(n)}(x)$ för godtyckligt $n \in \mathbb{N}$?

Inga såna här punkter, ..., i definitionen, tack!

κ Inverterbara funktioner

1. Om man definierar $\cos x$, $\sin x$ och e^x som funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, har de då inverser? Om inte, kan man ändra definitionerna så att dessa funktioner blir inverterbara? Jämför med bokens definitioner, som är de standardmässiga.
2. Ta någon inverterbar reell funktion f, rita dess graf, grafen till f^{-1} och linjen $y = x$. Hur förhåller sig dessa till varandra? Gör om för $f(x) = \sqrt{x}$.
3. Antag att $f(x)$ har en invers $f^{-1}(x)$. Finns det något samband mellan deras derivator? Försök resonera på två sätt, dels algebraiskt och dels geometriskt.
4. Vad är nu derivatan av $\arccos x$?

Från förra läsperioden kan ni ju allt om inversen till en funktion. Vilka funktioner har en invers?

Tips: Vad är sammansättningen av f och dess invers?

λ Kontinuerliga funktioner

1. Diskutera vad det betyder att en funktion är kontinuerlig. Kan ni minnas vad er gymnasielärare sa? Skriv en egen definition.
2. Hitta några funktioner som inte är kontinuerliga.
3. Är $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinuerlig?
4. Vad menar man när man säger att en funktion är kontinuerlig i en punkt?
5. Titta på bokens definitioner på sidorna 87–88. Stämmer detta överens med det ni kommit fram till i fråga 1?
6. Gör nu om uppgift 3. Hade ni gjort rätt sist?
7. * Försök hitta en funktion som är väldigt diskontinuerlig, t ex inte kontinuerlig i en enda punkt.
8. Om f och g är två kontinuerliga funktioner, hur är det då med deras summa och produkt? Vad gäller för $f - g$ och f/g?
9. Visa att alla polynom är kontinuerliga.
10. Visa att rationella funktioner är kontinuerliga (se fråga β–4).
11. Är alla kontinuerliga funktioner deriverbara? Bevisa eller hitta motexempel.
12. Är alla deriverbara funktioner kontinuerliga? Bevisa eller hitta motexempel.

Här börjar det bli roligt

Och här slutar det

μ Satsen om mellanliggande värden

1. Om $f(-1) = -4$ och $f(7) = 12$, vet jag då att f har ett nollställe i intervallet $(-4, 7)$? Formulera en sats som ger krav på en funktion som garanterar att jag har ett nollställe till funktionen.

2. Du funderar på att investera dina pengar i kaffe. Av den matematiskt kunnige brasilianaren får du veta att priset alltid är ett jämnt antal kr per kg och ges av en kontinuerlig funktion av tiden. Han säger att priset idag är 54kr/kg och att du är dum om du inte köper för allt du äger. Luras han? Vad är priset om 10 månader? (Han kunde kanske matte, men han visste inte att ni går på D.)

   av den?

   Satsen om mellanliggande värden hjälper här. Va, kan man tjäna pengar på den?

3. En dag besteg jag ett berg; började kl. 9 på morgonen och var på toppen kl. 18. Där övernattade jag. Nästa dag gick jag ned samma väg, började kl. 9 och var nere kl. 18. Var jag någonsin på samma plats vid samma klockslag? Hade jag varit det om nedfärden hade börjat kl. 10 och slutat kl. 15?

4. Gör uppgift 336 på sidan 95 i boken.

ν Medelvärdessatsen

Ni vet förmodligen det som står i följande punkter. Det kommer vi att utgå ifrån i nästa läsperiod. Några konsekvenser av detta härleder vi i följande stjärnmärkta uppgifter.

Tja, vet och vet...

- Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, då är f *begränsad* på $[a, b]$ och f har ett största värde och ett minsta värde på $[a, b]$.
- Om f är deriverbar på intervallet $[a, b]$ och antar sitt största (eller minsta) värde i punkten $c \in (a, b)$, då är $f'(c) = 0$.

1.* Låt f vara en funktion som är deriverbar på intervallet $[a, b]$ och så att $f(a) = f(b)$. *Rolles sats* säger då att det finns ett tal $c \in (a, b)$ så att $f'(c) = 0$. Kan man se geometriskt att detta borde vara så? Visa Rolles sats genom att undersöka var f kan ha sitt maximum och minimum på $[a, b]$.

2.* Om $f(a) \neq f(b)$, vad kan man då säga? Visa detta (*Medelvärdessatsen*). (Ledning: Vad är lutningen på linjen som går igenom $f(a)$ och $f(b)$?)

3.* Om $f'(x) > 0$ för alla x i något intervall, visa att f är växande på intervallet. Använd detta för att skriva ett enradigt bevis för fallet när $f'(x) < 0$.

ξ Rekommenderade hemuppgifter ur boken

1. 412abf, 424de, 426.
2. 311ae, 312a, 313d, 327b, 329a, 334, 401, 402a, 403abf, 414d, 422e.