A Avbildningar

3. Matriserna A, B och C avbildar planet på hela planet, men D, E och F avbildar planet på linje. De kan t ex karakteriseras av att en rad är en multipel av en annan (linjärt beroende), eller av att $ad - bc = 0$ (determinant lika med noll).

B Linearitet

2. Varje linje i planet som passerar genom origo och genom punkter $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ kan skrivas

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 t \\ r_2 t \end{pmatrix}.$$

Punkterna på denna linje avbildas nu av $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ till punkterna

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 t \\ r_2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ar_1 + br_2)t \\ (cr_1 + dr_2)t \end{pmatrix}$$

som är en linje m genom origo (t=0). Om $\begin{pmatrix} (ar_1 + br_2) \\ (cr_1 + dr_2) \end{pmatrix}$ skulle råka vara $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avbildas linjen ℓ inte på alla punkter på en ny linje utan bara på origo. Därav delmängdssymbolen i uttrycket $f(\ell) \subseteq m$.

D Invers

8. Jo, $IA = AI = A$ för alla 2×2 matriser A. Kolla t ex genom

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 + b0 & a0 + b1 \\ c1 + d0 & c0 + d1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

9. Vill hitta $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ så att $A'A = I$, d v s så att

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A'A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 5y & x + 2y \\ z + 5w & z + 2w \end{pmatrix}.$$

Får fyra ekvationer ur vilka jag kan bestämma de fyra obekanta. Finner att $(x, y, z, w) = (-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, dvs att $A' \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Om vi nu skall lösa $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kan vi multiplicera bägge led från vänster med A'. Vå får då $A'A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Då $A'A = I$ och finner vi att $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Klyftigt va?

E Determinant

2. Sambandet är $Area(A(\mathcal{R})) = |\det(A)|\, Area(\mathcal{R})$. Detta fungerar även för andra parallellogram än $\mathcal{R}$.

3. Genom upprepad användning av sambandet i uppgift E-2 vet vi att

$$Area(A(B(\mathcal{R}))) = |\det(A)|(|\det(B)|\, Area(\mathcal{R})) = |\det(A)\det(B)|\, Area(\mathcal{R})).$$

medan

$$Area((AB)(\mathcal{R})) = |\det(AB)|\, Area(\mathcal{R}).$$

Då $A(B(\mathcal{R})) = (AB)(\mathcal{R})$ finner vi att $|\det(AB)| = |\det(A)\det(B)|$. Med lite mer energi kan man också visa att vi t o m har $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (se sats sid 3:08 i boken).

5. Om determinanten är noll är en rad en multipel av en annan. Låt anta att det är andra raden som är en multipel av den första. Då har matrisen formen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$. Nu vet vi att origo alltid går på origo, men vi ser dessutom att alla punkter på linjen $ax + by = 0$ också går på origo.

F Ekvationslösning

3. Vi får matrisekvationer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

där i ena fallet $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \end{pmatrix}$ och i andra fallet $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Vi inser att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ har determinant noll och vi vet då att planet avbildas på en linje, som i detta fall är linjen$\begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$. Om $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ligger på denna linje finns det punkter som avbildas med matrisen på denna punkt. Detta är fallet i första ekvationssystemet och vi kan se att alla punkter på linjen $x + 2y = 25$ är lösningar till ekvationssystemet. I det andra fallet så ser vi att $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ inte ligger på linjen och därmed finns ingen punkt som avbildas på $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ och därmed finns inga lösningar till ekvationssystemet.

G Linjärt (o)beroende

4. Om vi vet att $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ och $A\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ så kan detta skrivas ihop till en matrisekvation $A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix}$. Detta kan man inse genom att tänka igenom matrismultiplikation (första kolonn går på första kolonn). Då nu matrisen $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ har linjärt oberoende kolonner är dess determinant skiljd ifrån noll och alltså har den invers. Vi finner att

$$A = \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}$$

I Bort med koordinaterna

4. En godtycklig linje kan skrivar $\mathbf{x} = \mathbf{r}t + \mathbf{p}, t \in \mathbb{R}$, där vi kan säga att $\mathbf{p}$ anger en startpunkt (t=0) och $\mathbf{r}$ anger riktningsvektor. Lineariteten ger då att $A(\mathbf{r}t + \mathbf{p}) = (A\mathbf{r})t + A\mathbf{p}$ som är en ny linje med startpunkt $A\mathbf{p}$ och riktningsvektor $A\mathbf{r}$. Observera att det kan vara så att den nya linjen går igenom origo trots att $\mathbf{x} = \mathbf{r}t + \mathbf{p}$ inte gjorde det.

J Linjärt oberoende. Igen

5. Vill hitta s och t så att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \text{d v s så att} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}.$$

Då kolonnerna i matrisen är linjärt oberoende, har matrisen determinant skiljd ifrån noll och därmed har den invers. Vi finner att

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{K}}$ Projektionsmatriser

2. Det räcker att veta vad matrisen gör med tre linjärt oberoende vektorer för att kunna beräkna matrisen. Först ser vi att normalen till planet ger en linje genom origo vars alla punkter projiceras till origo. För normalen $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ finner vi finner vi alltså att $A\mathbf{n} = \mathbf{0}$.

Sedan tar vi två linjärt oberoende punkter som ligger i planet, t ex $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$. Dessa kommer ju projiceras till sig själva, d v s $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ och $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Detta ger slutligen att

$$A \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

och eftersom de tre vektorerna finns invers till andra matrisen i vänster led och vi kan alltså lösa ut A.

$\boxed{\text{L}}$ Kärna och bild

2. För att finna kärnan till A så löser vi ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Om vi inte har kvadratisk matris A eller om den har determinant noll bör man använda Gausselimination.

För den första matrisen i uppgiften ser vi dock att den är inverterbar och därmed har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endats lösningen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Bilden blir hela planet eftersom A är inverterbar.

Den andra matrisen avbilar ju hela planet på $\mathbf{0}$ och därmed är $Ker(A) = \mathbb{R}^2$ och $Im(A) = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Vilken matris som helst på följande form funkar.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$$

6. Vilken matris som helst på följande form funkar.

$$\begin{pmatrix} 2k & -k \\ 2l & -l \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{M}}$ Ekvationssystem och homogena lösningar

4. Antag att $\mathbf{x}_1$ är en partikulär lösning, d v s att $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$, och att $\mathbf{x}_0$ är en homogen lösning, d v s att $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Då ser vi att

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

$\boxed{\text{N}}$ Egenvektorer och egenvärden

2. För den första matrisen i uppgiften: $\lambda_1 = 7$ och t ex $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ samt $\lambda_2 = -5$ och t ex $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

För den andra matrisen:$\lambda_1 = 7$ och t ex $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ samt $\lambda_2 = -5$ och t ex $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och slutligen $\lambda_3 = -5$ och t ex $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. Antag att A är en 2×2-matris och att $A\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ och $A\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_2$. Vi finner att

$$A\left(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\right) = \left(\lambda\mathbf{v}_1\,\lambda\mathbf{v}_2\right) = \lambda\left(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\right)$$

där $\mathbf{v}_i$ är kolonner i matrisen $(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2)$. Eftersom dessa kolonner nu är linjärt oberoende har $(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2)$ invers. Vi finner att

$$A = \lambda\left(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\right)\left(\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\right)^{-1} = \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

8. Induktion. Basfallet $n = 1$ klart. Antag nu att $A^{n-1}(\mathbf{x}) = \lambda^{n-1}\mathbf{x}$. Skall visa att $A^n(\mathbf{x}) = \lambda^n\mathbf{x}$. Ser att

$$\text{VL} = A^n\mathbf{x} = A^{n-1}(A\mathbf{x}) = A^{n-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A^{n-1}(\mathbf{x}) = \lambda\lambda^{n-1}\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x} = \text{HL}.$$

9. I planet kan varje vektor $\mathbf{v}$ fås som linjärkombination av de två linjärt oberoende vektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, d v s $\mathbf{v}$ kan skrivas $\mathbf{v} = s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$.

Detta ger att

$$A\mathbf{v} = A(s\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = sA\mathbf{x} + tA\mathbf{y} = s\lambda_1\mathbf{x} + t\lambda_2\mathbf{y}.$$

D v s vi vet verkan av A på $\mathbf{v}$ om vi känner A's egenvektorer och egenvärden.

$\boxed{\text{P}}$ Vektorer

2. Vi ges en relation på mängden av riktade sträckor som vi skall visa är en ekvivalensrelation, dvs att den är reflexsiv, symmetrisk och transitiv.

reflexsivitet: Den riktade sträckan $\mathbf{x}$ har ju samma längd som sig själv och även samma riktning som sig själv, alltså gäller $\mathbf{x}E\mathbf{x}$.

symmetri: Om $\mathbf{x}$ har samma längd som $\mathbf{y}$ har ju $\mathbf{y}$ samma längd som $\mathbf{x}$. P.s.s. med deras riktningar.

transitivitet: Om $\mathbf{x}$ har samma riktning som $\mathbf{y}$ och $\mathbf{y}$ har samma riktning som $\mathbf{z}$, har ju $\mathbf{x}$ samma riktning som $\mathbf{z}$. P.s.s. med deras längder.

$\boxed{\text{Q}}$ Skalär produkt

2. Vi använder att $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ för att se att

$$VL = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b}|\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (\mathbf{a}|\mathbf{a}) - 2\,(\mathbf{a}|\mathbf{b}) + (\mathbf{b}|\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,(\mathbf{a}|\mathbf{b}) = HL - 2\,(\mathbf{a}|\mathbf{b})$$

Detta betyder att VL=HL precis då $0 = (\mathbf{a}|\mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$, d v s då $\alpha = \pi/2$.

$\boxed{\text{R}}$ Vektorprodukt

3. Arean av ett parallellogram ges av $B \cdot h$ där B är basen och h höjden. Om vi använder beteckningarna i figuren i avsnittet i fråga (där vi nu tänker oss att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^3$) ser vi att $B = |\mathbf{u}|$ och $h = |\mathbf{v} \cdot \cos\alpha$ där α är vinkeln mellan vektorerna. Vi inser att arean ges av $B \cdot h = |\mathbf{u}||\mathbf{v} \cdot \sin\alpha = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$

$\boxed{\text{S}}$ Volym

4. Volymen ges av $B \cdot h$ där B är basen och h höjden. Om vi använder beteckningarna i figuren ser vi att $B = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ och $h = |\mathbf{a}|\cos\alpha$ där α är vinkeln mellan $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ och $\mathbf{a}$. Vi finner att volymen ges av $B \cdot h = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\mathbf{a}|\cos\alpha = (\mathbf{a}|\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

$\boxed{\text{U}}$ Linjer

5. Se exempel 2 i kapitel 1.11 i boken.

$\boxed{\text{V}}$ **Plan**

3. Om punkterna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ ligger i ett plan som har normalvektor $\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ så måste ju vektorn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ vara en vektor i planet, d v s den måste vara ortogonal mot normalen. Detta betyder att

$$0 = \left(\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) = n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0).$$

Flyttar vi om lite får vi

$$n_x x + n_y y + n_z z - n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0 = 0$$

som då är skrivet på den vanliga formen $Ax + By + Cz + D = 0$.

$\boxed{\text{Z}}$ **Linjära ekvationssystem**

2. Se föreläsningsanteckningar. Slutsatsen är om vi måste ha $b_{r+1} = \cdots b_n = 0$ för att det skall finnas lösning. Om det finns lösningar kan de bestå av: en punkt, en hel linje, ett helt plan o s v. Vilket det blir beror på r och m, d v s på rangen och antalet obekanta. Dimensionen på lösningsmängden är $m - r$.

$\boxed{\text{Å}}$ **Determinant**

2. Om man går igenom de elementära radoperationerna och ser vad de gör med determinant finnar man att de högst kan ändra determinanten med en faktor skiljd ifrån noll.