Matematik D1 del B – ht 97

Hemuppgifter i linjär algebra — del 2

1. Ett företag i nöjesbranschen vill tillverka skrattspeglar. Man är dock för snål för att göra riktiga speglar och tänker istället nöja sig med en videokamera, stor skärm och dator. Idén är att filma de som ställer sig framför "spegeln," och sedan förvränga bilden på olika sätt innan den visas på skärmen. Tillverka en mall för hur man töjer en person med faktor a på längden och faktor b på bredden. Vad händer om man tillåter negativa värden på a och b?

2. Ge exempel på något man kan göra med en optisk skrattspegel som inte går att göra i vår simulator med matriser. M a o, ge exempel på en *icke-linjär* skrattspegel.

3. Om jag tittar på mig själv i spegel ser jag mig inte som andra människor ser mig. Det gör jag däremot om jag filmas och sedan får se filmen. Hur skall man få det att se ut som i en riktig spegel i vår simulator?

4. Låt $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ vara punkter i $\mathbb{R}^3$ (eller $\mathbb{R}^n$) så att $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Visa att $A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2) + \ldots + A(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$.

   Linearitet

5. Bestäm matrisen som projicerar planet ortogonalt på linjen $y = 3x$.

6. Finns det en matris M så att $M\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ och $M\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$? Hur blir det om vi har $M\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ och $M\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$?

   Försök inte hitta M. Skriv om istället, och tänk på determinanter.

7. Visa att det inte finns någon matris M som avbildar linjen $y = x$ på parabeln $y = x^2$.

8. Finn kärnan och bilden för matriserna $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\4 & 4\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. I alla dessa fall blir kärnan och bilden var sin linje. Ser du något samband mellan dessa linjer å ena sidan och elementen i matriselementen å den andra?

9. Låt $A = \begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 8\end{pmatrix}$. Finn en matris B så att $\ker(B) = \operatorname{im}(A)$. Beräkna BA. Förklara.

10. Finn bilden till följande matriser: $\begin{pmatrix}1 & 0\\7 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\4 & 4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 7\\0 & 0\end{pmatrix}$.

11. Finn kärnan till matriserna $\begin{pmatrix}-7 & 1\\-7 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-4 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 3\\0 & 5\end{pmatrix}$.

12. Multiplicera första matrisen i övning 11 med den första i övning 10, sen andra matrisen med den andra o s v. Förklara resultatet i ord.

    Om inte resultatet blir väldigt enkelt kanske du har multiplicerat i fel ordning?

13. Låt $\mathbf{x}$ vara en egenvektor vars motsvarande egenvärde är 0. Vilket namn har vi använt för linjen genom origo på vilken $\mathbf{x}$ ligger?

14. Finn alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\-1 & 0 & 3\\2 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

15. För vilka a har $\begin{pmatrix}3 & a\\-a & -1\end{pmatrix}$ två linjärt oberoende egenvektorer?

16. Planet $\mathcal{P}$ spänns upp av $(1, 2, 3)$ och $(1, 1, 1)$. Finn tre linjärt oberoende egenvektorer och motsvarande egenvärden till matrisen som projicerar rummet ortogonalt på $\mathcal{P}$.

17. Finns det 2×2 matriser med inga egenvektorer? Hur kan man beskriva dessa?

18. Gör några egna uppgifter om egenvärden och egenvektorer. Exempel: Bestäm en matris genom att kräva att den skall skicka vektorn $(3, 1)$ till $5 \cdot (3, 1)$ och $(7, 4)$ till $-3 \cdot (7, 4)$. Finn egenvärden och egenvektorer för denna matris.

1. $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Negativa värden på a och b ger spegling i y-axeln respektive x-axeln.

2. Man kan t ex inte göra så att ansiktet blir väldigt litet och magen stor, eftersom alla areor ändras lika mycket. Men man kan förstås åstadkomma detta genom att dela upp spegelytan och låta olika matriser verka på olika delar.

3. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (spegling i y-axeln).

4. $A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2) + \ldots + A(\mathbf{x}_k) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_k) = A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

5. $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

6. Nej; determinanten är 0 i högerledet men inte i vänsterledet. Ja, $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

7. Tja,..., en matris avbildar en linje på en linje, och en linje kan inte sammanfalla med (eller vara en delmängd i) parabeln $y = x^2$.

8. De respektive kärnorna är $y = -x/2$, $y = -x$ och $x = 0$. Bilderna är $y = 3x$, $y = 4x$, respektive $y = 0$.

   Om matrisen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ har determinant 0, då är dess kärna linjen som bestäms av $by = -ax$ om inte $a = b = 0$, annars linjen $dy = -cx$.

   Bilden är då linjen $ay = cx$ om inte $a = b = 0$ annars linjen $x = 0$.

9. En sådan matris är $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, för $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ ligger i $\operatorname{im} A$, och därmed i $\ker B$, för varje $\mathbf{x}$. D v s att $BA\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för varje $\mathbf{x}$, och den enda matrisen som skickar alla punkter $\mathbf{x}$ till origo är nollmatrisen.

10. Se 8.

11. Se 8.

12. Se 9.

13. Kärnan till matrisen ifråga.

14. $\lambda = 0$; $(3, 2, 1)$ en motsvarande egenvektor.

15. De a för vilka $|a| < 2$.

16. Vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(1, 1, 1)$ är linjärt oberoende. De ligger i planet och är därför egenvektorer med egenvärdet 1 (de skickas till sig själva). Varje vektor som är ortogonal mot planet är en egenvektor med egenvärdet 0. *En* sådan vektor ges av kryssprodukten $(1, 2, 3) \times (1, 1, 1)$. Hur man räknar fram den får ni snart reda på...

17. Om en matris $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ har inga egenvektorer då finns det ingen lösning λ till ekvationen $\det(M - \lambda I) = 0$. Det händer precis när $(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$ (titta på andragradsekvationen $\det(M - \lambda I) = 0$).

(Hör gärna av dig till `einar@math.chalmers.se` om du hittar fel i facit)