Lösningar till tentan i Matematik D1 Del B, 990408

---

1. (a)

$$AXA + C = D \Leftrightarrow AXB = D - C.$$

Om nu A och B har inverser är ovanstående ekvivalent med att

$$X = A^{-1}(D-C)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} (\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Nej. Eftersom A och B har inverser oberoende av siffrorna i D och vi har ekvivalenspilar är X unikt bestämd av uttrycket $X = A^{-1}(D-C)B^{-1}$ oberoende av siffrorna i D.

2. Vi Gauss-eliminerar totalmatrisen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \text{a} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \text{a-1} \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \text{a-1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{a-3} \end{array}\right)$$

Alltså finns lösning bara då $a = 3$. Bakåtsubstitution ger då att $(x, y, z, u) = (1+t, -t, 1, t)$, dvs en hel linje i $\mathbb{R}^4$.

3. (a) Linjen ℓ har riktningsvektor $\mathbf{r} = (1, 2, 1)$ och passerar till exempel punkten $(0, 1, 3)$ då $t = 0$. Nu räcker det skapa en linje genom $(0, 1, 3)$. Det gör vi genom att ge en godtycklig riktningsvektor som inte är linjärt beroende av $\mathbf{r}$, t ex $\mathbf{r}_2 = (1, 0, 0)$. Vi finner att t ex linjen

$$\ell_1 : (x, y, z) = (1, 0, 0)t + (0, 1, 3) = (t, 1, 3),$$

uppfyller kraven.

(b) Det finns oändligt många riktningsvektorer som är ortogonala mot $\mathbf{r}_1$. Vi väljer den som också är ortogonal mot $\mathbf{r}$. Får $\mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = (0, 1, -2)$. Nu väljer vi en punkt på linjen ℓ t ex $(0, 1, 3)$ och skapar linjen

$$\ell_2 : (x, y, z) = (0, 1, -2)t + (0, 1, 3) = (0, t+1, -2t+3).$$

(c) Tag en punkt på var och en av de två linjerna ℓ_1 och ℓ_2. Vi väljer $(1, 1, 3)$ och $(0, 2, 1)$. Skapa nu linjen som går igenom dessa punkter. Det ges av

$$\ell_3 : (x, y, z) = ((1, 1, 3) - (0, 2, 1))t + (0, 2, 1) = (t, -t+2, 2t+1).$$

4. Minns att tangentens ekvation i $(a, f(a))$ ges av $y - f(a) = f'(a)(x-a)$. Vidare är $f(x) = \ln|x^2 - 2x + 1| = \ln|x-1|^2 = 2\ln|x-1|$, och därmed är $f'(x) = \frac{2}{x-1}$.

(a) Eftersom $f(0) = 0$ och därmed $(0,0)$ ligger på kurvan given av f finner vi en tangent igenom $(0,0)$ helt enkelt genom att

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{2}{0-1}(x-0) \Leftrightarrow y = -2x.$$

(b) Nu vill vi hitta a så att $(1,1)$ satisfierar ekvationen $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ d v s så att $1 - f(a) = f'(a)(1-a)$ gäller. Vi sätter in våra f och f' och får ekvationen

$$1 - 2\ln|a-1| = \frac{2}{a-1}(1-a) \Leftrightarrow -2\ln|a-1| = -3 \Leftrightarrow \ln|a-1| = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow |a-1| = e^{3/2} \Leftrightarrow a = \pm e^{3/2} + 1$$

5.

6. (a) Nej. T ex är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Om A inte inverterbar betyder det att dess determinant är noll. Eftersom vi vet att $det(AB) = det(A)det(B) = 0 \cdot det(B) = 0$ har även produkten AB determinant noll och därmed saknar den invers.

(c) Antag att $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ två lösningar. Då gäller att

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

d v s differensen $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ligger i kärnan till A.

7. (a) T ex $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Min motivation i (b) motiverar dessa exempel.

(b) Finns minst två alternativ. T ex kan man använda de två ekvationer som sekulareekvationerna (karakteristiskaekvationerna) ger, nämligen $0 = det(A - 2E)$ och $0 = det(A - 3E)$. Detta ger två ekvationer och vi har fyra obekanta i A. Om vi låter

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

är dessa ekvationen ekvivalenta med att $a + d = 5$ och $ad - bc = 6$.
Alternativt: Använd $AV = VD$ och sätt in val av egenvektorer i V och minns att $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Eftersom egenvektorerna skall vara linjärt oberoende, enligt (c) nedan, finns alltid V^{-1}. Vi får att $A = V^{-1}DV$.

(c) Om en egenvektor motsvarande egenvärdet 2 skulle vara linjärt beroende av egenvektor motsvarande egenvärdet 3 skulle det innebär att de låg på samma linje genom origo. Det skulle ju innebära att det fanns en vektor $\mathbf{x}$ som var egenvektor som både motvarade egenvärdet 2 och 3. Det är omöjligt eftersom

$$3\mathbf{x} - 2\mathbf{x} = A\mathbf{x} - A\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0,$$

men $\mathbf{x} = 0$ räknas inte som egenvektor.

8. Antag att $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Då vi roterar koordinatsystemet genom att $R_\alpha \mathbf{p} = \mathbf{p}'$ för alla $\mathbf{p}$ i planet finner vi speciellt att $R_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{x}'$ och $R_\alpha \mathbf{y} = \mathbf{y}'$. Genom att lösa ut ur dessa och stoppa in i $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ finner vi att

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow AR_\alpha^{-1}\mathbf{x}' = R_\alpha^{-1}\mathbf{y}' \Leftrightarrow R_\alpha A R_\alpha^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{y}'.$$

Slutsatsen blir att $R_\alpha A R_\alpha^{-1}$ vår transformation uttryckt i det roterade koordinatsystemet.