Lösningar till tentan i Matematik D1 Del B, 1998–12–16

1. (a) $f'(x) = e^x + xe^x + 2\sin x \cos x$, d v s $f'(0) = 1$.
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$.
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{y\to 0} 3\frac{\sin(y)}{y} = 3 \cdot 1 = 3$

2. Vi Gauss-eliminerar totalmatrisen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Bakåtsubstitution ger till sist att $(x, y, z, w) = (-7 + 3t, 8 - 5t, t, 5 - 2t)$, dvs en hel linje i $\mathbb{R}^4$.

3. Dessa uppgifter kan man svara på utan att räkna om man vill, om man använder resultatet i uppgift 2.

   (a) Svar: Nej. Eftersom vi inte har unik lösning i uppgift 2 är determinanten för koefficientmatrisen determinant lika med noll och därmed har den ingen invers.
   (b) Svar: Ja. Det finns två möjligheter. Först om $\mathbf{b} \in Im(A)$ kommer vi ha en linje av lösningar eftersom rangen av A är 3 och vi har fyra obekanta. Om däremot $\mathbf{b} \notin Im(A)$ så saknas lösningar. Som exempel på det första fallet har vi högerledet vi använde i uppgift 2 och som exempel då vi inte har någon lösning kan man betrakta $\mathbf{b} = (1, 10, 3, 6)^t$.
   (c) Svar: Ja, de är linjärt beroende. Vektorerna $(-1, 0, 1, -2)$, $(0, -1, 0, -1)$, $(1, 2, 1, 1)$ och $(-1, -1, 2, 0)$ är kolonnerna i koefficient matrisen A. Då denna hade determinant lika med noll är kolonnerna (och även raderna) linjärt beroende.

4. De två planen

$$\pi_1 : x + y + z = 0 \text{ och } \pi_2 : x + 2y + 3z = 2.$$

   skär varandra i en linje då de har linjärt oberoende normaler. Kalla linjen L. Vi vill alltså hitta ett tredje plan som innehåller denna linje L. De plan som innehåller denna linje har alla normal vektor som är en linjärkombination av normal vektorerna till planen π_1 och π_2, d v s är på formen

$$\mathbf{n} = a(1, 1, 1) + b(1, 2, 3).$$

   Om planet har sådan normalvektor och den innehåller någon punkt på L så innehåller den hela linjen L. Ser att t ex ligger punkten $(-1, 0, 1)$ på L och därmed är varje plan som innehåller L av typen

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - (-1, 0, 1)) = (a(1, 1, 1) + b(1, 2, 3)) \cdot ((x, y, z) - (-1, 0, 1)) \\ &= a(1, 1, 1) \cdot (x, y, z) - a\,0 + b(1, 2, 3) \cdot (x, y, z) - b\,2 \\ &= a(x + y + z - 0) + b(x + 2y + 3z - 2). \end{aligned}$$

   Dvs varje linjär kombination av planen fungerar. Speciell duger egentligen både π_1 och π_2 med det svaret godtas inte enligt frågans formulering.

5. (a) Man får volymen av parallellepipeden genom att beräkna absolutbeloppet av följande determinant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} = 12.$$

   Alltså är volymen 12 volymenheter.

(b) De tre vektorerna $(a, a^2, a^3), (b, b^2, b^3)$ och (c, c^2, c^3) är inte ligger i ett gemensamt plan precis när följande determinant är skild ifrån noll:

$$
\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix} = \\
&= abc \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = \\
&= abc \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \\
&= abc(b-a)(c-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{pmatrix} = \\
&= abc(b-a)(c-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix} = \\
&= abc(b-a)(c-a)(c-b).
\end{aligned}
$$

Vi ser alltså att detta inträffar precis då $0, a, b$ och c alla är olika.

6. (a) Om $\mathbf{x}$ är sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ betyder det per definition att $\mathbf{x}$ är en egenvektor med egenvärde 1. Enligt förutsättningarna är endast multipler av $(0, 1, 1)^t$ egenvektorer med egenvärde 1.

   (b) Vi vet att $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$. Det implicerar att $AV = VD$ där

$$
V = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

och

$$
D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.
$$

Nu är

$$
A = VDV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.
$$

7. Antag att λ är ett egenvärde till M och att $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Då gäller att $M^n\mathbf{v} = E\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Å andra sidan är $M^n\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$. Vi finner att $\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$, d v s $\lambda^n = 1$. Detta innebär att λ är en enhetsrot och ligger på enhetscirkeln , ty om vi tar belopp av bägge leden finner vi att

$$
1 = |\lambda^n| = |\lambda|^n.
$$

Då $|\lambda|$ är reellt och positivt måste $|\lambda| = 1$.