Lösningar till tentan i Matematik D1 Del B, 000418

1. (a) Då $f(x) = (x+2)\sin(3x) + 1$ är $f'(x) = \sin(3x) + (x+2)\cos(3x)3$, d v s $f'(0) = 6$. Tangentens ekvation i punkten $(0,1)$ ges då av $y - 1 = 6(x-0)$ d v s av $y = 6x + 1$.

   (b) Ser att

$$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} = \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x-1)} = \frac{6}{2} = 3.$$

   (c) En funktion f kallas kontinuerlig i en punkt $x_0 \in D_f$ ifall $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, och den kallas kontinuerlig ifall den är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd D_f.

2. Om linjen skall vara parallell med planen måste den ha en riktningsvektor $\mathbf{r}$ som är ortogonal mot båda planens normal vektorer $\mathbf{n}_1$ och $\mathbf{n}_2$. Vi finner att

$$\mathbf{r} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Då linjen passerar genom den givna punkten ges en parametrisering av linjen på följande vis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3. (a) Volymen ges av absolutbeloppet av

$$Det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

   d v s volymen är 4 volymsenheter.

   (b) Finner först att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Sedan ser vi att

$$Det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 11 \neq 0.$$

   Alltså är dessa tre vektorer linjärt oberoende och ligger därmed inte i ett och samma plan.

4. (a) Vi Gauss-eliminerar totalmatrisen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 3 & a & 4a \\ 1 & a-1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 3+a & 0 & 3a \\ 1 & a-1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -a^2+2a+3 & 0 & -a^2+3a \\ 1 & a-1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   Alltså har vi unik lösning om $0 \neq a^2 + 2a + 3 = (a-3)(a+1)$, d v s om $a \notin \{-1, 3\}$. Om sätter in $a = -1$ i det eliminerade systemet blir översta ekvationen orimlig och därmed saknas lösning. Däremot ger $a = 3$ oändlig många lösningar som vi snart ser i (b).

   (b) Sätter vi in $a = 3$ i det eliminerade systemet får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   Bakåtsubstitution ger då att $(x, y, z, u) = (3 - 2t, t, 3t - 2)$, dvs en linje i $\mathbb{R}^3$.

5. (a) Normal vektorn måste projiceras på origo, samt vektorer i planet projiceras på sig själva. Detta innebär t ex att

$$A\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\text{ och }A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

d v s vi har funnit en egenvektor motsvarande egenvärdet 0 och två egenvektorer motsvarande egenvärdet 1.

(b) Ovanstående kan skrivas

$$A\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

vilket medför att

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&5&1\\2&1&5\end{pmatrix}$$

(c) Projektionen av den givna vektorn blir

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&5&1\\2&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\11\\19\end{pmatrix}.$$

6. (a) Om man skalärmultiplicerar $\mathbf{x}$ med $\mathbf{b}_i$ finner man

$$(\mathbf{x}|\mathbf{b}_i)=\left(\sum_{k=1}^{3}a_k\mathbf{b}_k|\mathbf{b}_1\right)=\sum_{k=1}^{3}a_k\left(\mathbf{b}_k|\mathbf{b}_i\right)=a_i\left(\mathbf{b}_i|\mathbf{b}_i\right)$$

där den sista likheten följer av att vektorerna är ortogonala. Man finner den önskade likheten efter att man löst ut a_i.

(b) Ser att $(\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2)=1\cdot 0=0\cdot 1+1\cdot 0=0$ och därmed är vektorerna ortogonala. Finner en tredje vektor, ortogonal mot de två tidigare, mha vektorprodukt

$$\mathbf{b}_3=\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(c) Enligt (a) finner vi att

$$a_1=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)/\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=2,\text{ och på liknande sätt att }a_2=0\text{ och }a_3=1.$$

7. (a) $Ker(A)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.

(b) Om $\mathbf{x}\in Ker(A)\cap Ker(B)$ gäller att $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ och $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Från detta följer att $(A+B)\mathbf{x}=A\mathbf{x}+B\mathbf{x}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, d v s $\mathbf{x}\in Ker(A+B)$.

(c) Om vi sätter $B=-A$ finner vi att $Ker(A+B)=Ker(\mathbf{0})=\mathbb{R}^n$ medan $Ker(A)\cap Ker(B)=Ker(A)\cap Ker(-A)=Ker(A)$ som inte är hela $\mathbb{R}^n$, såvida A inte är nollmatrisen.

8. Vi kan skriva $AV=VD$ där D är diagonalmatris med egenvärdena som diagonalelement och V är matrisen med de n egenvektorerna som kolonner (i rätt ordning i förhållande till kolonnernas ordningen D). Då de n egenvektorerna är linjärtoberoende vet vi att $Det(V)\neq 0$ och därmed har V invers och vi akn skriva $A=VDV^{-1}$.

Då nu $\mathbf{0}=A^k=VD^kV^{-1}$ kan vi lösa ut D^k och finner att $D^k=V^{-1}\mathbf{0}V=\mathbf{0}$. Vi drar därmed slutsatsen att för varje diagonalelement λ i D gäller att $\lambda^k=0$. Men detta innebär att $\lambda=0$, d v s $D=\mathbf{0}$. Slutsatsen blir alltså att $A=VDV^{-1}=V\mathbf{0}V^{-1}=\mathbf{0}$.