MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
TENTAMEN 990408 KL. 8:45–12:45

Hjälpmedel: Enkelsidigt A4 (valfritt innehåll)

Telefonvakt: Rolf Liljendahl ankn.:5301

Matematik D del B TMA 551

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!
Motivera dina svar väl.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. (a) Lös $AXB + C = D$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (b) Kan man får ett annat *antal* lösningar genom att byta siffror i matrisen D? Motivera ditt svar väl! (6p)

2. För vilka värden på a har följande system mer än en lösning?

$$\begin{cases} x + 2y \phantom{{}+z} + u = 1 \\ x + 3y + z + 2u = 2 \\ y + 2z + u = 3 \\ x + 2y + z + u = a \end{cases}$$

   Ge, i parameterform, lösningsmängderna för alla sådana a. (6p)

3. Låt ℓ vara linjen $(x, y, z) = (t, 2t + 1, t + 3)$ i $\mathbb{R}^3$.
   (a) Ge exempel på en linje ℓ_1 som skär ℓ i precis en punkt.
   (b) Finn en linje ℓ_2 som är ortogonal mot ℓ_1 och som skär ℓ.
   (c) Finn en linje som skär både ℓ_1 och ℓ_2 men inte i samma punkt. (6p)

4. Låt $f(x) = \ln|x^2 - 2x + 1|$ för alla $x \neq 1$.
   (a) Bestäm ekvationen för någon tangent till f:s kurva som passerar genom punkten $(0, 0)$.
   (b) Bestäm lutningen på varje tangent till f:s kurva som passerar genom $(1, 1)$. (6p)

5. (a) Ge exempel på en kontinuerlig funktion som inte är deriverbar. Motivera ditt svar väl.
   (b) Är din funktion deriverbar i någon punkt?
   (c) Vad betyder det att en funktion är kontinuerlig? Ge en definition. (6p)

vänd...

6. (a) För reella tal a och b gäller att om $ab = 0$ är $a = 0$ eller $b = 0$. Gäller samma påstående för matriser, d v s gäller att $AB = \mathbf{0} \implies A = \mathbf{0}$ eller $B = \mathbf{0}$.
   (b) Antag att $n \times n$-matrisen A inte inverterbar. Kan man finna matris B så att AB blir inverterbar?
   (c) Visa att om vi har två olika lösningar till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så ligger deras differens i kärnan till A. (6p)

7. (a) Ge två exempel på 2×2-matriser som har 2 och 3 som egenvärden.
   (b) Ange en metod att finna alla 2×2-matriser som har 2 och 3 som egenvärden.
   (c) Måste en sådan matris ha linjärt oberoende egenvektorer? Motivera väl. (8p)

8. Låt A vara en 2×2-matris. Vi betraktar den som en linjär transformation från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$. Antag att vi roterar vårt koordinatsystem med en rotationsmatris R_α, d v s som roterar planet α radianer moturs. Finn den matris B som är samma linjära transformation som A fast uttryckt i det roterade koordinatsystemet. (6p)

Lycka till! — Samuel