MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
TENTAMEN 990825 KL. 8:45–12:45

Hjälpmedel: Enkelsidigt A4 (valfritt innehåll)

Telefonvakt: Niklas Ericsson ankn.:5319

Matematik D del B TMA 551

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!
Motivera dina svar väl.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Beräkna derivatan av följande funktioner.

   (a) $f(x) = x^3 + x^2 + x$ (b) $f(x) = 3^x + 2^x + 1^x$ (c) $f(x) = \ln(\cos x)$

   (6p)

2. (a) Hitta alla tangenter till kurvan $y = x^3$ som har tangenter som är parallella med linjen $y = 3x + 2$, och beräkna dessa tangenters skärningspunkter med x-axeln.

   (b) Finns det tangenter som är ortogonala mot $y = 3x + 2$? Motivera ditt svar väl! (6p)

3. (a) Bestäm antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2ax + 3y + \quad az = & 4a \\ x + (a-1)y \qquad = & a \\ x \qquad - y + \quad z = & 1 \end{cases}$$

   (b) Ange lösningarna i de fall då de är oändligt många.

   (c) Låt N vara antalet lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vilka värden kan N anta om $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ och då $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. (8p)

4. (a) Beräkna egenvärden och normerade egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (b) Minns att en matris M kallas ortogonalmatris om $M^t M = I$. Visa att matrisen V, som har de normerade egenvektorerna ovan som kolumner, är en ortogonalmatris.

   (c) Vad är V^{-1}?

   (d) Beräkna A^{100}. (8p)

5. (a) Förklara i ord, och utan att använda matematiska symboler, vad en egenvektor till en matris är.

   (b) Ge en nogrann definition av begreppet egenvektor till matris.

   (c) Antag att $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ egenvektorer motsvarande två olika egenvärden till en matris A. Kan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ vara linjärt beroende? (6p)

vänd...

6. (a) Finn k så att följande funktion blir kontinuerlig:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x-1} + \cos(x-1) & \text{om } x < 1 \\ (k+1)x^2 + (k^2+2)x + k & \text{om } x \geq 1. \end{cases}$$

(b) Kan man finna k så att f blir deriverbar? (6p)

7. Antag att A är en matris som uppfyller $im(A) \subseteq ker(A)$. Vad är då $det(A)$? (4p)

8. Antag att A är en $n \times n$-matris. Visa att

$$(A\mathbf{x})^t A\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y} \text{ för alla vektorer } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad A^t = A^{-1}.$$

(6p)

Lycka till! — Samuel