Matematik
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen 98-12-16 kl. 8:45–12:45

Hjälpmedel: Enkelsidigt A4 (valfritt innehåll),
inga räknedosor
Telefonvakt: Jarl Lindrud ankn.: 5361

Matematik D del B — TMA551

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad! Motivera dina svar väl.

1. Beräkna

a) derivatan av $f(x) = xe^x + \sin^2 x$ i punkten $x = 0$.

$$b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(4x)}$$

(8)

2. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x \qquad + z - u = 2 \\ -2x - y + 3z + u = 11 \\ x \qquad + z + 2u = 3 \\ -2x - y + z \qquad = 6 \end{cases}$$

(6)

3. Låt A vara koefficientmatrisen till ekvationssystemet i uppgift 2.

(a) Har A någon inversmatris?

(b) Kan ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha olika antal lösningar för olika högerled $\mathbf{b}$?

(c) Kan man finna koefficienter a, b, c, d, inte alla lika med noll, så att

$$a(-1-2,1,-2) + b(0,-1,0,-1) + c(1,3,1,1) + d(-1,1,2,0) = (0,0,0,0)?$$

(6)

4. Låt π_1 och π_2 vara två plan i $\mathbb{R}^3$ givna av ekvationerna

$$\pi_1 : x + y + z = 0 \text{ och } \pi_2 : x + 2y + 3z = 2.$$

Ge exempel på ett plan π_3, skiljt ifrån π_1 och π_2, så att alla tre planen skär varandra i exakt en linje. (6)

5. För varje reellt tal t låt $\mathbf{v}(t)$ vara vektorn (t, t^2, t^3) i $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm volymen av den parallellepiped som spänns upp av $\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1), \mathbf{v}(2)$ och $\mathbf{v}(3)$.

(b) Visa att $\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(a), \mathbf{v}(b)$ och $\mathbf{v}(c)$ spänner upp en parallellepiped precis då a, b och c alla är olika och skilda ifrån noll.

(6)

6. Låt A vara en matris som har egenvärde $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 3$ med tillhörande egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Finn alla vektorer $\mathbf{x}$ som avbildas på sig själv av A, d v s sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$? Motivera väl.

   (b) Beräkna A. (8)

7. Antag att M är en matris sådan att $M^n = I$, d v s identitetsmatrisen, för något naturligt tal n. Visa att om λ är ett egenvärde till M så är $|\lambda| = 1$. (7)

8. Välj ut ett moment eller ett begrepp ur kursen som du funnit användbart eller intressant. Försök formulera några meningar, som en gymnasie-elev kan förstå, som förklarar detta moment/begrepp. Det skall framgå varför du tycker detta är användbart/intressant och hur det fungerar. (2)

God Jul! — Samuel