MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Tentamen 00-04-18 kl. 8:45–12:45

Hjälpmedel: Dubbelsidigt A4 (valfritt innehåll),
inga miniräknare
Telefonvakt: Jakob Hultén ankn.: 0740-459022

Matematik D del B — TMA551

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad!

Tänk på att det i huvudsak är beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.
På denna tenta betecknar vi skalärprodukt med $(x|y)$

1. (a) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = (x+2)\sin(3x) + 1$ i punken $(0,1)$.
   (b) Beräkna $\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$.
   (c) Vad betyder det att en funktion är kontinuerlig? Ge en definition! (8)

2. En linje går igenom punkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och är parallell med båda planen $x - 2y + z = 1$ och $2x + 2y - 3z = 2$. Ge linjen på parameterform. (6)

3. (a) Beräkna volymen av parallellepipeden som spänns upp av vektorerna

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Undersök om vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ ligger i samma plan (6)

4. (a) Bestäm, för varje värde på parametern a, antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2ax + 3y + \quad az = \quad 4a \\ x + (a-1)y \qquad = \quad a \\ x \quad - y + \quad z = \quad 1 \end{cases}$$

   (b) Ange lösningarna i de fall då de är oändligt många. (6)

5. Låt A vara en matris som projicerar punkter i $\mathbb{R}^3$ ortogonalt på planet $2x + y - z = 0$.
   (a) Ange tre egenvektorer till A samt motsvarande egenvärden.
   (b) Beräkna A.
   (c) Ange projektionen av punkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(6)

....vänd

6. Låt $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ och $\mathbf{b}_3$ vara tre parvis ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^3$. Detta innebär, bland annat att de är linjärt oberoende, så varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ kan skrivas

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + a_3\mathbf{b}_3, \text{ där } a_i \in \mathbb{R}.$$

   (a) Visa att $a_i = \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i|\mathbf{b}_i)}$ för $i \in \{1, 2, 3\}$.

   (b) Låt

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Visa att dessa två vektorer är ortogonala, och hitta en tredje vektor $\mathbf{b}_3$ som är ortogonal mot både $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$.

   (c) Uttryck vektorn $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ som en linjärkombination av vektorerna i (b).

(6)

7. Antag att A och B är två $n \times n$-matriser.

   (a) Förklara vad $Ker(A)$ betyder?

   (b) Visa att $Ker(A) \cap Ker(B) \subseteq Ker(A + B)$.

   (c) Gäller att $Ker(A) \cap Ker(B) \supseteq Ker(A + B)$? Bevisa eller ge motexempel.

(6)

8. Antag att A är en $n \times n$-matris som har n stycken linjärt oberoende egenvektorer. Antag vidare att det finns ett naturligt tal k så att $A^k = \mathbf{0}$. Visa att $A = \mathbf{0}$. (6)

Lycka till! — Samuel