Uppgiftshäfte 5

Övningens syfte

Vi har sett hur man efter Gausseliminering enkelt kan se när ett ekvationssystem saknar lösning. Första avsnittet ger ett annat perspektiv på vad det betyder att systemet saknar lösning. Sedan går vi över till att studera vad man kangöra ifall ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. Finns det något $\mathbf{x}$ som minimerar felet i någon mening? Denna uppgiftslapp handlar om minsta kvadratmetoden som är en flitigt använd metod för att anpassa modeller till data.
Kapitel i boken : Sammankoppling av flera tidigare studerade avsnitt i kapitel 2 och 3, samt slutligen kapitel 3.5

V Bild och kärna

Definition 1 *Låt A vara en matris. Kärnan av A är mängden*

$$Ker(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Definition 2 *Låt A vara en matris. Bilden av A är mängden*

$$Im(A) = \{\mathbf{y}\,;\, \mathbf{y} = A\mathbf{x},\ \textit{för något}\ \mathbf{x}\}.$$

1. Beräkna $Ker(M)$ då M i tur och ordning är en av de 6 matriserna definierade i början på Uppgiftshäfte 1. Vad får ni för slags mängder?

2. Beräkna nu också $Im(M)$ för de 6 matriserna. Ser ni något samband med mellan dimensionerna på $Ker(M)$ och $Im(M)$.

3. Funkar detta samband också för matrisen $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

4. Visa att en matris A ger en injektiv avbildning om och endast om $Ker(A) = \{\mathbf{0}\}$. Vad kan A vara för typ av matris för att ditt argument skall fungera?

5. Låt A vara en $n \times n$ matris och $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Låt $\mathbf{x}_1$ vara en (*partikulär*)lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x}_0$ en lösning till det motsvarande homogena systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Visa att $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$ är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Linearitet!

6. Vad har vi kallat lösningsmängden till det homogena ekvationssystemet?

7. Ta fram tre olika lösningar till

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Ligger lösningarna på samma linje? Är det alltid så? Vilken lutning har linjen jämfört med $Ker(A)$? Men detta är ju exakt samma övning som 5, eller hur?

8.* Antag att $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$. Visa att *varje* lösning $\mathbf{x}$ till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan skrivas som $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, där $\mathbf{x}_0$ är någon lösning till det motsvarande homogena systemet. Enkel algebra (och ett (enkelt) knep)

$\boxed{9.}$ Gör uppgifterna 3.3, 3.33 och 3.34 i boken.

W Minstakvadratmetoden

1. Betrakta matrisavbildningen från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ given av matrisen

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Visa att $Im(A)$ är ett plan. Bestäm ekvationen för detta plan på formen $Ay_1 + By_2 + Cy_3 + D = 0$.

2. Betrakta ekvationssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

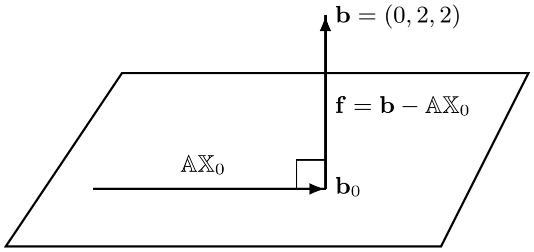
Är detta system lösbart?

3. Bestäm alla högerled för vilka systemet är lösbart.

4. Ekvationssystemet ovan är inte lösbart eftersom alla lösningar $\mathbb{A}\mathbb{X}$ ligger i ett plan och punkten $\mathbf{b} = (0, 2, 2)$ ligger inte i det planet. Vilken punkt blir den bästa approximationen till högerledet?

5. Vad blir lösningen av ekvationssystemet med det nya högerledet?

6. Betrakta figuren. I föregående övning skulle ni bestämma vilken punkt i planet som gav den bästa approximationen. Förhoppningsvis valde ni högerledet så att felvektorn $\mathbf{f}$ blev så kort som möjligt. D v s, eftersom



$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2 - x_1 - x_2 \\ 2 - 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

innebär det att minimera

$$|\mathbf{f}| = \sqrt{(-x_1 + x_2)^2 + (2 - x_1 - x_2)^2 + (2 - 2x_1 + x_2)^2}.$$

Kvadratsumman under rottecknet skall alltså minimeras; därav namnet *minstakvadratmetoden*.

7. Ett enkelt geometriskt sätt är att välja högerledet $\mathbf{b}_0$ så att felvektorn $\mathbf{f} = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0$ är vinkelrät mot planet $3y_1 + y_2 - 3y_3 = 0$. I förra övningen räknade vi fram lösningen genom att först beräkna $\mathbf{b}_0$. Vi skall nu ta fram en metod där vi slipper beräkna det nya högerledet för att hitta lösningen.

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{f} = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0 \text{ har minimal längd} \\
\iff & \mathbf{f} = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0 \perp \text{planet} \\
\iff & \mathbf{f} = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0 \perp \text{varje vektor i planet} \\
\iff & \mathbf{f} = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0 \perp \mathbb{A}\mathbb{X} \quad \forall \mathbb{X} \\
\iff & \mathbb{A}\mathbb{X} \cdot (\mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0) = 0 \quad \forall \mathbb{X} \\
\iff & (\mathbb{A}\mathbb{X})^t (\mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0) = 0 \quad \forall \mathbb{X} \\
\iff & \mathbb{X}^t \mathbb{A}^t (\mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbb{X}_0) = 0 \quad \forall \mathbb{X} \\
\iff & \mathbb{X}^t (\mathbb{A}^t \mathbf{b} - \mathbb{A}^t \mathbb{A}\mathbb{X}_0) = 0 \quad \forall \mathbb{X} \\
\iff & \mathbb{A}^t \mathbb{A}\mathbb{X}_0 = \mathbb{A}^t \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Sätt nu in siffrorna från tidigare och lös systemet!

8. Räkna ut felvektorns längd.

9. Formulera en sats som säger hur man, för det olösliga ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kan beräkna $\mathbf{x}_0$ så att $|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ för alla $\mathbf{x}$.

$\boxed{10.}$ Gör uppgifterna 3.47, 3.50, 3.51 och 3.62 i boken.