Uppgiftshäfte 6

Övningens syfte

Vi avslutar kursen med att se hur man kan använda egenvektorer för att diagonalisera matriser. Vidare tittar vi på hur man kan uttrycka kvadratiska former med hjälp av matriser. Detta kommer ni återkomma till i senare matematikkurser när ni tittar på hur man kan finna max- och min-punkter till funktioner i flera variabler.

Kapitel i boken : 8.3–8.6

X Diagonalisering

1. Finn alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Uttryck vektorn $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ som en linjärkombination av de egenvektorer till A som du beräknat ovan.

3. Kan man uttrycka varje vektor i $\mathbb{R}^3$ som en linjärkombination av egenvektorerna till A? Skriv ner en matrisekvation ur vilken man kan beräkna koefficienterna i linjärkombinationen. Kalla koefficientmatrisen för V.

4. Uttryck nu även vektorn $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$ som linjärkombination av egenvektorerna till A.

5. Finns det en matris som ger koefficienterna i linjärkombinationen i uppgift 4 direkt givet koefficienterna i linjärkombinationen i uppgift 2. Bestäm denna matris. Man kan utnyttja matrisekvationen ni skrivit ner i uppgift 3.

6. Skriv upp ett matrissamband mellan A, V och er nyfunna matris D.

7. Uttrycka A^{1000} i V och D och använd sedan detta uttryck för att beräkna A^{1000}.

8. Matrissambandet $AV = VD$ gäller för en allmän kvadratisk matris. Visa detta.

9. Sambandet $AV = VD$ räcker inte alltid för att man skall kunna diagonalisera matrisen som ni gjorde i uppgift 5. Vad måste gälla för att det skall gå?

Y Kvadratiska former

1. Med en kvadratisk form i variablerna $x_1, \cdots x_n$ menas en linjärkombination i alla möjliga uttryck på formen $x_i x_j$. Skriv ner en allmän kvadratisk form i tre variabler.

2. Hur många koefficienter har en allmän kvadratisk form i 4 variabler? Hur många blir det för n variabler?

3. Låt $\mathbf{x} = (x_1\, x_2\, x_3)^t$ och låt A vara en 3×3-matris. Vad blir då $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$?

4. Visa att varje kvadratisk form i tre variabler kan skrivas på formen $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$.

5. En matris kallas symmetrisk om $S^t = S$. Visa att varje kvadratisk form i variabler $x_1, \cdots x_n$ kan skrivas på formen $\mathbf{x}^t S\mathbf{x}$, där S är en symmetrisk $n \times n$-matris och $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_3)^t$.

6. Finn den symmetriska matrisen S som ger den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = 4x_1x_2 + 3x_2^2$.

7. Beräkna egenvärden och egenvektorer till S. Låt V vara matrisen med normerade egenvektorer som kolonner. Vad blir V^tV? En matris sådan att dess invers ges av dess transponat kallas en ON-matris.

8. Låt nu
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$
Sätt in detta uttryck i matrisbeskrivningen av $Q(x_1, x_2)$. Vad får ni?

9. Läs sats 8.7 på sidan 380 i boken. Använd nu denna sats, och era erfarenheter från uppgift 8, för att visa att man genom att byta variabler med hjälp av V får en kvadratisk form som bara är en linjärkombination i uttryck på formen z_i^2.

10.* Rita upp kurvan $Q(x_1, x_2) = 25$ med hjälp av Matlab. Rita även in egenrummen ni beräknat i uppgift 7. Rita slutligen in $Q_2(z_1, z_2) = 25$ där $Q_2(z_1, z_2)$ är den kvadratiska formen i variablerna z_i ni beräknat i uppgift 8. Kan ni se vad avbildingen given av matrisen V haft för inverkan?